9 НАКЛОННЫЙ ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИК

Цель работы

Измерение зависимости периода колебаний маятника от эффективной составляющей ускорения свободного падения.

Идея эксперимента

Теоретически период математического маятника определяется его длиной L и ускорением свободного падения g. Влияние величины g можно продемонстрировать, изменяя угол наклона плоскости колебаний относительно вертикали.

Теоретическое введение

Физическим маятником называется любое твердое тело, которое может совершать колебания относительно оси (точки) подвеса в поле тяготения. Уравнение колебаний физического маятника, как частный случай вращательного движения вокруг неподвижной оси, имеет вид:

$$J\ddot{\varphi} = M\ , \tag{9.1}$$

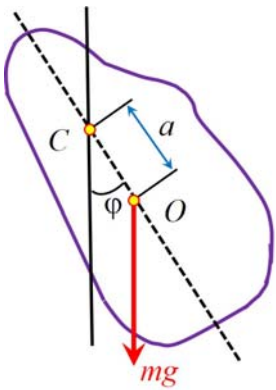

Рис. 9.1. Физический маятник: C – точка подвеса, O – центр масс, a – расстояние от точки подвеса до центра масс; m – масса маятника.

где J – момент инерции относительно оси подвеса C, $M(\varphi)$ – суммарный момент сил, действующих на тело при его отклонении от положения равновесия на угол φ (рис. 9.1). В отсутствие сил трения этот момент обусловлен только силой тяжести, точка приложения которой совпадает с центром масс тела, и равен $M = -mga\sin\varphi$, где m – масса маятника, a – расстояние между центром масс O и точкой подвеса C, g – ускорение свободного падения. При малых углах отклонения от положения равновесия $\sin\varphi \approx \varphi$, уравнение (9.1) сводится к уравнению гармонических колебаний:

$$\ddot{\varphi} + \frac{mga}{J}\varphi = 0, \qquad (9.2)$$

собственная круговая частота которых равна

$$\omega = \sqrt{\frac{mga}{J}}\,. \qquad (9.3)$$

В частном случае, когда размеры тела маятника массой m пренебрежимо малы по сравнению с длиной невесомого подвеса l, имеем $J = ml^2$, $a = l$ и, согласно формуле (9.3), $\omega = \sqrt{g/l}$, что совпадает с выражением для круговой частоты математического маятника.

Если ось физического маятника наклонена под углом θ к горизонту, то колебания маятника будут происходить в плоскости, перпендикулярной этой оси. В этом случае момент сил будет обусловлен лежащей в данной плоскости компонентой силы тяжести $mg_{\|} = mg\cos\theta$, а в уравнение колебаний вместо g войдет параметр $g' = g\cos\theta$ (который можно назвать эффективным ускорением свободного падения). Соответственно, частота и период колебаний маятника будут зависеть от наклона оси:

$$\omega(\theta) = \sqrt{\frac{mg'a}{J}} = \sqrt{\frac{mga\cos\theta}{J}};$$
$$T(\theta) = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga\cos\theta}} = \frac{T(0)}{\sqrt{\cos\theta}}. \qquad (9.4)$$

Проверке этих формул посвящена первая часть задачи.

Во второй части на примере конкретного физического маятника изучается зависимость периода колебаний от расстояния между точкой подвеса и центром масс груза (тела).

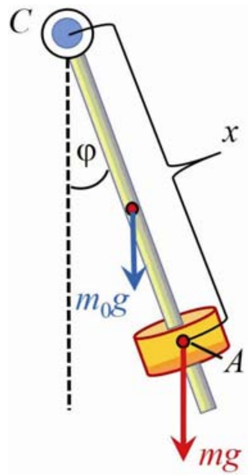

Рис. 9.2. Схема маятника.

Используемый в данной задаче маятник состоит из массивного цилиндрического груза, закрепленного на тонком стержне, конец которого подвешен на оси C (рис. 9.2). Положение груза на стержне можно изменять.

Рассмотрим малые колебания этого маятника. Момент инерции такой системы равен сумме моментов инерции стержня и цилиндра $J = J_{\text{с}} + J_{\text{ц}}$. Момент инерции стержня длиной l и массой m_0 относительно оси C равен $J_{\text{с}} = \frac{1}{3} m_0 l^2$, а момент инерции цилиндра массой m, центр масс которого A находится на расстоянии x от оси, по теореме Гюйгенса–Штейнера равен

$$J_{\text{ц}} = mx^2 + \frac{1}{4} mR^2 + \frac{1}{12} ml^2, \quad (9.5)$$

где второе слагаемое – собственный центральный момент инерции цилиндра относительно оси, перпендикулярной его оси симметрии.

Момент сил, возвращающих систему в положение равновесия, создается силой тяжести, действующей на стержень и приложенной в его середине, и силой тяжести, приложенной к центру масс цилиндра:

$$M(\varphi) = -\left(m_0 \frac{l}{2} + mx \right) \sin\varphi .$$

Подставляя эти величины в уравнение (9.1), для частоты собственных колебаний получаем:

$$\omega = \sqrt{g \frac{m_0 l/2 + mx}{m_0 l^2/3 + mR^2/4 + mx^2 + ml^2/12}} . \quad (9.6)$$

Длина математического маятника, имеющего те же частоту и период колебаний, что и данный физический маятник, называется его приведенной длиной $l_{\text{п}}$. В нашем случае

$$l_{\text{п}}(x) = \frac{m_0 l^2/3 + mR^2/4 + mx^2 + ml^2/12}{m_0 l/2 + mx} , \quad (9.7)$$

поэтому для периода получаем:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g} \frac{m_0 l^2/3 + mR^2/4 + mx^2 + ml^2/12}{m_0 l/2 + mx}} = 2\pi \sqrt{\frac{l_{\text{п}}}{g}} . \quad (9.8)$$

Если ввести обозначения $J_0 = \frac{m_0 l^2}{3} + \frac{mR^2}{4} + \frac{ml^2}{12}$ и $M_0 = \frac{m_0 l}{2}$, то

$$T(x) = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g} \frac{J_0 + mx^2}{M_0 + mx}} . \quad (9.9)$$

График зависимости $T(x)$ показан на рис. 9.3.

Как и должно быть, при больших расстояниях x груза до оси вращения период физического маятника асимптотически приближается к соответствующему значению для математического маятника: $T \to 2\pi\sqrt{x/g}$. При уменьшении x наблюдается отклонение от этой зависимости и увеличение периода. Для рассматриваемого физического маятника это объясняется тем, что при малых x момент инерции цилиндрического груза

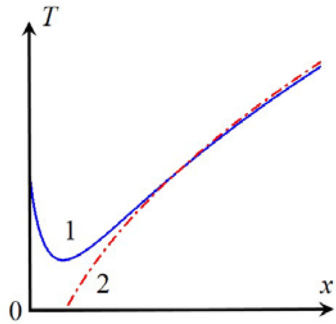

Рис. 9.3. Зависимость периода колебаний физического (1) и математического (2) маятников от расстояния x центра масс груза маятника до оси.

$J_ц = mx^2 + \frac{1}{4}mR^2 + \frac{ml^2}{12}$ практически не меняется, а возвращающий момент сил уменьшается пропорционально x, что и приводит к возрастанию периода.

Экспериментальная установка

Экспериментальная установка показана на рис. 9.4. Маятник состоит из тонкого *стержня* 1 и *цилиндрического груза* 2, который фиксируется на стержне *винтом* 10. Верхний конец стержня закреплен в *муфте* 4, надетой на *ось* 5. Ось закрепляется в наклонном положении *винтом* 6. Стрелка на конце оси показывает по *шкале* 7 угол наклона в градусах от 0 до 90°. *Фотодатчик* 8 для регистрации колебаний маятника закреплен на *стержне* 9, связанном с осью 4, и поворачивается вместе с маятником. Период колебаний измеряется *таймером* 11 (отдельно показан в ***Приложении 1***), подключенным к фотодатчику.

Параметры маятника: масса стержня m_0 = 77,1 г, длина от оси l_0 = 358 мм; масса груза – m = 300 г, радиус R = 25 мм, высота h = 20 мм.

Ускорение свободного падения g = 9,8 м/с^2.

Проведение экспериментов

Все электрические и механические соединения на установке выполнены заранее, установка полностью готова к работе.

Упражнение 1. **Измерение зависимости периода колебаний от угла наклона оси маятника**

Измерения

Перед началом работы следует убедиться, что таймер включен (светится его индикатор). Переключатель режимов работы таймера (15, см. *Приложение 1*) должен быть установлен в положение измерения периодов колебаний T_A△ с пиктограммой в виде маятника. Для перевода таймера в режим измерений нужно один раз в начале работы нажать кнопку 3 «Start», при этом загорится зеленый индикатор «Gate». В дальнейшем никаких манипуляций с таймером производить не нужно. Проверьте, чтобы в положении равновесия стержень маятника проходил через середину фотодатчика.

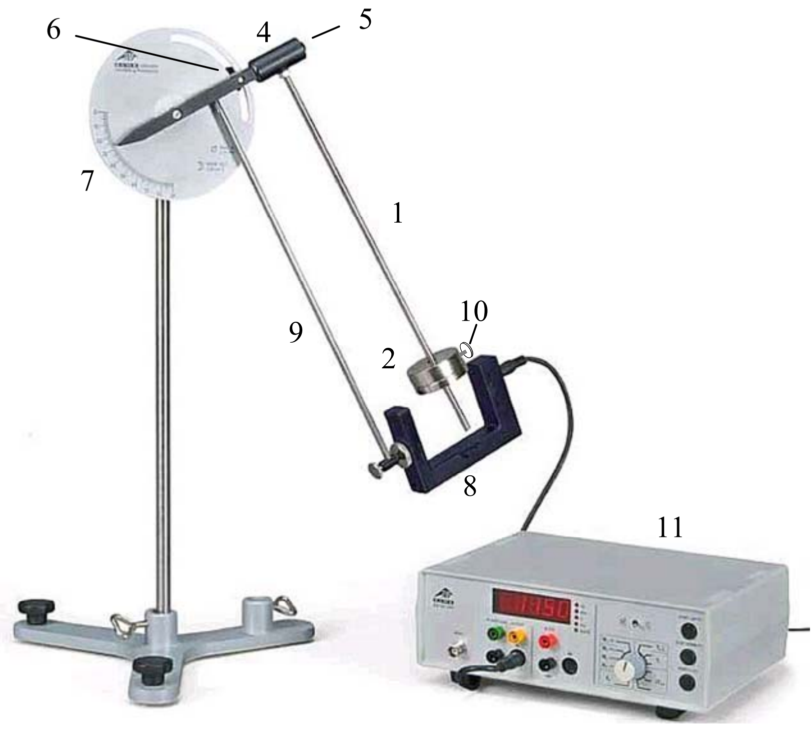

Рис. 9.4. Общий вид установки.

Положение груза на стержне маятника удобно измерять линейкой или рулеткой, как расстояние от его верхнего края с координатой x_1 до центра оси подвеса. Необходимая для расчетов координата центра масс равна $x = x_1 + h/2$, где h = 20 мм – высота цилиндрического груза.

1. Установите ось маятника горизонтально (угол 0^0 по шкале). Закрепите груз винтом около середины стержня маятника (x_1 = 15 см).

2. Отведите конец маятника от положения равновесия не более чем на 1–2 см (на малый угол)[*]) и отпустите. Таймер покажет значение периода в миллисекундах. По мере убывания амплитуды колебаний (из-за затухания) период будет немного уменьшаться. В качестве результата нужно взять последнее наименьшее устойчивое значение. Эти измерения провести k = 3 раза. Данные записать в табл. 9.1.

Таблица 9.1

Экспериментальные данные

θ, °	k	T_k, с	$\bar{T}$, с	$S_{\bar{T}}$, с	σ_T, с
0	1				
	2				
	3				
10	1				
	2				
	3				
80	1				
	2				
	3				

3. Последовательно увеличивая угол наклона на 10° до достижения 80°, провести измерения периода как в п. 2. Результаты записать в табл. 9.1.

Обработка результатов

1. Для каждого из углов наклона оси маятника вычислить среднее арифметическое значение периода

[*]) Все приведенные выше формулы для частоты и периода относятся только к малым колебаниям.

$$\overline{T} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_k .$$

2. Для каждого из положений оси вычислить случайную погрешность $S_{\overline{T}}$ среднего арифметического по формуле:

$$S_{\overline{T}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}\left(T_k - \overline{T}\right)^2} .$$

3. Рассчитать суммарную погрешность периода по формуле:

$$\sigma_T = \sqrt{S_{\overline{T}}^2 + \sigma_{\text{п}}^2} ,$$

где $\sigma_{\text{п}}$ – приборная погрешность таймера. При отсутствии заводского описания погрешность цифровых приборов можно принять равной 2-3 единицам младшего разряда индикатора.

Результаты пп. 1 – 3 записать в табл. 9.1.

4. Вычислить $1/\cos\theta$ и $\overline{T}^2$, а также погрешности этих величин (по формуле для косвенных измерений*):

$$S_{\frac{1}{\cos\theta}} = \sqrt{\frac{\partial(\cos\theta)^{-1}}{\partial\theta}\cdot S_\theta^2} = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} S_\theta ,$$

$$\sigma_{\overline{T}^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial\left(\overline{T}^2\right)}{\partial\overline{T}}\right)^2 \cdot \sigma_{\tilde{T}}^2} = 2\overline{T}\sigma_{\overline{T}} .$$

Результаты записать в табл. 9.2.

Таблица 9.2

Значения $\overline{T}^2$, 1/cosθ, $A_{\text{эксп}}$, и их погрешности

θ, °	$\overline{T}^2$, с^2	$\sigma_{\overline{T}^2}$, с^2	$1/\cos\theta$	$S_{1/\cos\theta}$	$A_{\text{эксп}}$, с^2	$S_{A_{\text{эксп}}}$, с^2
0						
10						
20						
…	…	…	…	…		
80						

*)Точность определения угла наклона принять равной 0,5°.

5. Построить график зависимости $\overline{T}^2$ от $1/\cos\theta$, и методом наименьших квадратов найти его аппроксимацию линейной функцией $T^2 = A_{\text{эксп}}(1/\cos\theta)$. Определить коэффициент $A_{\text{эксп}}$ и соответствующие погрешности $S_{A_{\text{эксп}}}$. Результаты записать в табл. 9.2.

6. Согласно (9.8), приведенная длина связана с периодом T соотношением:

$$T^2(\theta) = 4\pi^2 \frac{l_{\text{п}}}{g} \frac{1}{\cos\theta},$$

а следовательно, коэффициент наклона $A_{\text{эксп}} = 4\pi^2 l_{\text{п}}/g$. Вычислите приведенную длину $l_{\text{п}}^{\text{эксп}} = \dfrac{A_{\text{эксп}} g}{4\pi^2}$ и ее погрешность, используя значение g = 9,801 м/с^2 для широты Баку (π =3,14159…) .

7. По формуле (9.7) вычислите теоретическое значение приведенной длины $l_{\text{п}}^{\text{теор}}$ и соответствующую погрешность.

8. Сравните теоретическое и экспериментальное значения приведенной длины маятника. Сформулируйте выводы.

Упражнение 2. **Измерение зависимости периода колебаний от положения груза**

Измерения

1. Установите ось маятника горизонтально (угол 0° по шкале). Закрепите груз винтом на нижнем конце стержня, измерьте и запишите координату x_1. Измерьте период колебаний маятника. Результат запишите в табл. 9.3.

2. Последовательно поднимая груз каждый раз на 1,5–2,5 см (точное значение не важно) до максимально возможной высоты, измерьте периоды колебаний маятника. При установке груза избегайте положений, когда луч фотодатчика будет пересекать сам груз. Результаты измерений запишите в табл. 9.3.

Таблица 9.3.

Зависимость периода колебаний *T* от координаты груза x_1.

x_1, мм	x, мм	$T_{\text{эксп}}$, с	$l_{\text{п}}$, см	$T_{\text{теор}}$, с

Обработка результатов

1. Нанесите на график экспериментальные точки зависимости $T(x)$.
2. По формуле (9.7) для каждого значения x вычислите теоретические значения приведенной длины $l_{п}$.
3. По формуле (9.8) для каждого значения x вычислите теоретические значения периода колебаний маятника.
4. Постройте расчетную кривую $T(x)$ на том же графике. Оцените полученный результат.

Выводы

В результате выполнения лабораторной работы должны быть получены экспериментальные зависимости периода колебаний маятника от угла его наклона и положения груза, определены экспериментальные значения приведенной длины маятника и проведено их сравнение с теоретическими значениями.

Контрольные вопросы

1. Что называется физическим маятником? В каком случае его свойства описываются моделью математического маятника?
2. Получите уравнение колебаний физического маятника.
3. Что такое приведенная длина физического маятника?
4. Как изменится период колебаний маятника при уменьшении амплитуды его колебаний? Почему?