7 ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ ПОЛЕТА ПУЛИ С ПОМОЩЬЮ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Цель работы

Использование законов сохранения импульса, момента импульса и механической энергии для решения практических задач механики.

Идея эксперимента

Определение скорости пули по реакции мишени (баллистического маятника).

Теоретическое введение

Законы сохранения в механике. В классической механике все три закона сохранения – закон сохранения импульса, закон сохранения момента импульса и закон сохранения механической энергии – являются теоремами, которые доказываются на основе трех законов Ньютона. Рассмотрим каждый из этих законов.

Для определенности введем понятия ***изолированной*** и ***замкнутой*** систем тел.

Замкнутой называется такая система тел для которой суммарное действие всех внешних сил равно нулю.

Изолированной называется такая система тел, на которую не действуют внешние силы.

Закон сохранения импульса. *Суммарный импульс замкнутой системы тел сохраняется неизменным*:

$$\sum m_i \mathbf{v}_i = \text{const}\,, \tag{7.1}$$

где m_i –масса i-материальной точки, $\mathbf{v}_i$ – вектор ее скорости.

Закон сохранения момента импульса. ***Суммарный момент импульса системы тел относительно некоторой точки пространства сохраняется неизменным, если суммарный момент всех внешних сил относительно этой же точки равен нулю:***

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \text{const}\,, \tag{7.2}$$

где $\mathbf{r}_i$ – радиус-вектор i-й материальной точки.

Закон сохранения механической энергии. Если на материальную точку, имеющую массу m, в каждой точке пространства действует сила, которая может быть представлена в виде градиента от некоторой функции $U(x, y, z)$:

$$\mathbf{F} = -\mathrm{grad}U, \tag{7.3}$$

то наряду с кинетической энергией $m\upsilon^2/2$ можно ввести потенциальную энергию U, при этом для материальной точки будет сохраняться полная энергия $E = m\upsilon^2/2 + U$. Для доказательства этого утверждения рассмотрим уравнение движения этой материальной точки (второй закон Ньютона):

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\mathrm{grad}U(\mathbf{r})\,. \tag{7.4}$$

Умножим левую и правую части уравнения (7.4) на d$\mathbf{r}$ = $\mathbf{v}$dt и проинтегрируем. Учитывая, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \ddot{\mathbf{r}}\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{v}}\mathbf{v}\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{\upsilon_2^2}{2} - \frac{\upsilon_1^2}{2} \tag{7.5}$$

и

$$\int_{r_1}^{r_2} \mathrm{grad}U\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{U(r_1)}^{U(r_2)} \mathrm{d}U = U(r_2) - U(r_1), \tag{7.6}$$

получим:

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2} + U(\mathbf{r}_2) = \frac{m\upsilon_1^2}{2} + U(\mathbf{r}_1). \tag{7.7}$$

Соотношение (7.7) выражает закон сохранения механической энергии для рассматриваемого случая.

Столкновение тел.

Удар (соударение) – кратковременное взаимодействие двух тел, вызванное при непосредственным соприкосновением, при котором изменением положения этих тел в пространстве за время их соударения можно пренебречь.

Абсолютно упругий удар – удар, при котором кинетическая энергия тел до соударения равна кинетической энергии тел после соударения.

Абсолютно неупругий удар – удар, при котором тела после соударения движутся с одинаковой скоростью. При таком ударе механическая энергия не сохраняется (переходит в другие формы, например, в тепло).

Теоретическое рассмотрение процессов в задаче. Рассмотрим взаимодействие пули с телом, которое может вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку подвеса. *Центром удара* называется точка тела, которая лежит на пересечении линии удара и перпендикулярной ей плоскости, проходящей через ось вращения и центр масс тела, при условии, что удар не передается на ось и не оказывает ударных воздействий на подшипники, в которых эта ось закреплена. Центр удара всегда существует у тела, имеющего плоскость симметрии, перпендикулярную оси вращения.

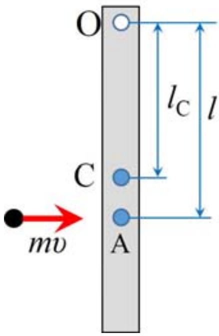

Рис. 7.1. Тело и пуля перед соударением.

Определим положение центра удара. На рис. 7.1 схематично изображено произвольное твердое тело массой M, центр масс которого находится в точке C, а неподвижная ось вращения проходит через точку O перпендикулярно плоскости чертежа. Соударение небольшого тела (пули) массой m с твердым телом происходит в точке A. Скорость пули v перед соударением направлена перпендикулярно прямой OC. Дальнейшее рассмотрение справедливо для любого типа удара – как упругого, так и неупругого.

Если точка A является центром удара, то в момент удара внешние ударные силы со стороны оси вращения отсутствуют. Поэтому выполняется закон сохранения проекции импульса на горизонтальную ось для системы «тело + пуля» на интервале времени «до удара – сразу после удара». Запишем закон сохранения импульса в проекции на направление первоначального движения пули:

$$mv = Mv_C + mv'. \tag{7.8}$$

Здесь v_C и v' – скорости центра масс тела (точки C) и пули сразу после соударения. В случае абсолютно неупругого удара скорость пули после соударения v' совпадает со скоростью точки A тела (см. рис. 7.1).

Запишем также закон сохранения момента импульса относительно точки подвеса O на том же интервале времени:

$$mvl = J\omega + mv'l, \tag{7.9}$$

где ω – угловая скорость тела, l – расстояние от оси подвеса до центра удара. По теореме Гюйгенса – Штейнера момент инерции J тела относительно оси, проходящей через точку подвеса маятника, равен

$$J = J_0 + M l_C^2, \tag{7.10}$$

где J_0 – момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс. Уравнение кинематической связи для скорости центра масс и угловой скорости вращения тела имеет вид:

$$v_C = \omega l_C . \tag{7.11}$$

Подставим (7.10), (7.11) в уравнения (7.8), (7.9) и сгруппируем слагаемые, относящиеся к пуле и к телу, по разные стороны от знака равенства. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} M\omega l_C = m(v - v'), \\ (J_0 + M l_C^2)\,\omega = ml(v - v'). \end{cases} \tag{7.12}$$

Поделив второе уравнение на первое, для положения центра удара получим:

$$l = \frac{J_0 + Ml_C^2}{Ml_C} = \frac{J_0}{Ml_C} + l_C . \tag{7.13}$$

Как видно из (7.13), центр удара лежит ниже центра масс. Например, для маятника в виде тонкого стержня длиной L центр удара находится на расстоянии $l = (2/3)L$ от оси. Баллистический маятник конструируют таким образом, чтобы центр удара совпадал с центром масс:

$$l = \frac{J_0}{Ml_C} + l_C \approx l_C, \tag{7.14}$$

что реализуется, если $J_0 << Ml_C^2$, т.е. $J \simeq M l_C^2$ и масса сосредоточена в точке центра масс (как у математического маятника).

В этом случае при попадании горизонтально летящей пули в центр масс маятника можно использовать закон сохранения импульса. Существенной особенностью баллистического маятника является то, что время действия пули на маятник (время удара) мало по сравнению с периодом колебаний маятника, т. е. за время удара маятник не успевает отклониться от положения равновесия. По углу отклонения баллистического маятника от положения равновесия после соударения определяется первоначальная скорость пули.

Рассмотрим абсолютно неупругое соударение пули и баллистического маятника. Будем считать, что пуля попадает в центр удара, который совпадает с центром масс. Запишем закон сохранения проекции импульса для системы тел «пуля + маятник» на интервале времени от момента перед соударением до момента сразу после соударения:

$$mv = (M + m)v' . \tag{7.15}$$

Здесь v – скорость пули перед соударением, v' – скорость маятника сразу после абсолютно неупругого соударения.

Закон сохранения механической энергии для системы тел «пуля + маятник + земля» на интервале времени от момента сразу после соударения до момента максимального отклонения маятника имеет вид:

$$\frac{(M + m)v'^2}{2} = (M + m)gl_C(1 - \cos\alpha) , \tag{7.16}$$

где α – угол максимального отклонения маятника. Соотношение (7.16) справедливо в пренебрежении затуханием колебаний маятника в пределах одной четверти периода его колебаний.

Исключая из системы уравнений (7.15) и (7.16) скорость v', получаем связь скорости пули до соударения и угла максимального отклонения маятника:

$$v = \frac{M + m}{m}\sqrt{l_C g}\, 2\sin\frac{\alpha}{2} . \tag{7.17}$$

Формула (7.17) используется в дальнейшем для расчета скорости пули.

Экспериментальная установка

Вид экспериментальной установки показан на рис. 7.2. Она смонтирована на опорной плите 1. На опорной плите закреплена вертикальная плита 2, на которой закреплены подшипник с винтом 3 и пружинная пушка 4. Баллистический маятник 5 подвешен на подшипнике 3 и представляет собой очень легкий пластмассовый стержень с прикрепленным внизу устройством с прокладкой из поролона, которое предназначено для улавливания шариков. Нижняя часть

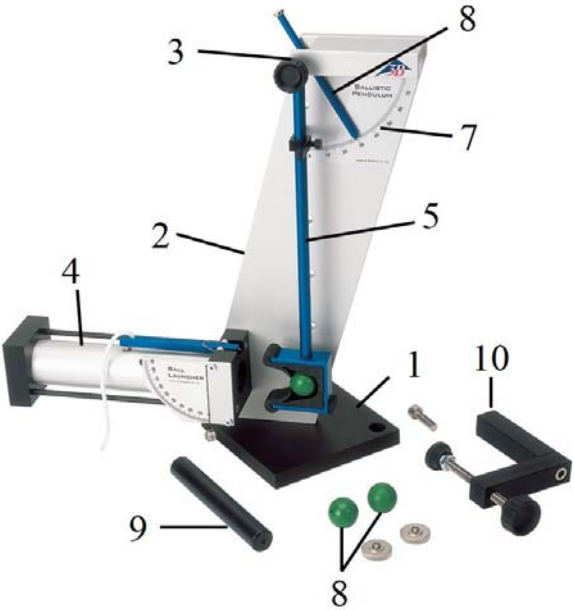

Рис. 7.2. Экспериментальная установка.

ловушки утяжелена массивными стальными элементами, поэтому ее центр практически совпадает с центром масс и центром удара маятника. На оси баллистического маятника закреплен указатель 6 максимального угла отклонения, а на вертикальной плите –шкала 7. В состав установки входят также набор шариков (снарядов) 8 и шомпол 9 для заряжания шарика в пушку. Массы маятника M и шариков m указаны на установке. Опорная плита 1 крепится к столу с помощью струбцины 10.

Проведение эксперимента

В маятник в горизонтальном направлении стреляют шариком из пружинной пушки. Шарик застревает в ловушке и сообщает маятнику некоторую угловую скорость, в результате чего маятник от-

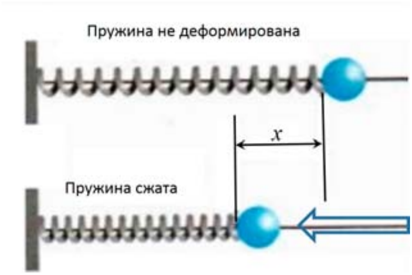

Рис. 7.3. Изменение положения шарика при деформации пружины.

клоняется на небольшой угол, который может быть измерен по шкале, расположенной на боковой стойке.

Скорость вылетающего из пушки шарика зависит от его массы и потенциальной энергии пружины (рис. 7.3). При сжатии пружины ее потенциальная энергия $E_{пр}$ пропорциональна квадрату деформации:

$$E_{пр} = \frac{kx^2}{2}, \tag{7.18}$$

где k – коэффициент жесткости пружины, x – смещение конца пружины (рис. 7.3).

В момент завершения выстрела потенциальная энергия пружины практически полностью переходит в кинетическую энергию пули $E_к$, если считать, что масса пружины $m_{пр}$ пренебрежимо мала ($m_{пр} \ll m$):

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{mv^2}{2}, \tag{7.19}$$

где v – скорость шарика, m – его масса.

Из (7.19) следует, что

$$v = \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)x. \tag{7.20}$$

Как видно из (7.20), скорость пули линейно зависит от начального сжатия пружины [*]).

Упражнение 1. **Определение скорости пули в зависимости от степени сжатия пружины пушки**

[*]) При учете массы пружины пропорциональность скорости v и x сохраняется, но $v = x\sqrt{k/(m + m_{пр}/4)}$.

Прежде всего необходимо убедиться, что в положении равновесия ось пушки горизонтальна. Для этого на боковой стороне пушки имеется отвес и шкала. Если это условие не выполнено, то необходимо подрегулировать положение пушки с помощью винта.

Чтобы подготовить пушку к выстрелу, затвор отводят в нужное положение. Вставляют пулю (шарик) в дуло пушки и задвигают ее шомполом до щелчка. Убедившись, что пуля после вылета из пушки попадет в маятник, производят выстрел. Для этого «дергают» вверх веревочку, привязанную к спусковому механизму. Отклонение маятника после попадания в него пули определяют по стрелке на шкале.

Измерения

Производят выстрелы последовательно с каждого из трех положений пускового механизма. Результаты угла отклонения маятника записывают в табл. 7.1. Для каждого положения пускового механизма измерения провести не менее $n = 5$ раз.

Обработка результатов

1. Вычислите средние значения угла отклонения маятника $\overline{\alpha}$:

$$\overline{\alpha} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$$

2. Определите выборочное стандартное отклонение среднего арифметического величины α:

$$S_\alpha = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i - \overline{\alpha}\right)^2}\ .$$

3. С учетом систематических погрешностей (погрешность прибора, погрешность округления) величина стандартного отклонения суммарной погрешности величины α равна

$$S_{\Sigma\alpha} = \sqrt{S_\alpha^2 + \sigma_{\alpha\text{сист}}^2}\ .$$

В качестве погрешности прибора можно взять погрешность считывания угла отклонения маятника по шкале, которую обычно принимают равной 1/3 от цены деления шкалы.

4. Выполните пункты 1–3 для каждого из положений спускового механизма. Результаты записать в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Экспериментальные данные

№ положения пускового механизма	x_1	N	α	$\bar{\alpha}$	S_α	υ	S_υ	A	S_A	$k \pm S_k$
	м		°	°	°	$\frac{\text{м}}{\text{с}}$	$\frac{\text{м}}{\text{с}}$	с^{-1}	с^{-1}	Н/м
1		1								
		2								
		3								
		4								
		5								
2		1								
		2								
		3								
		4								
		5								
3	…									

5. По формуле (7.17) вычислите скорости пуль для каждого положения спускового механизма и рассчитать погрешность определения скорости пуль, считая, что она в основном определяется только погрешностью измерения углов:

$$S_\upsilon = \sqrt{\left|\frac{\partial \upsilon}{\partial \alpha}\right|^2 \cdot S_{\Sigma\alpha}^2} \approx \upsilon \frac{S_{\Sigma\alpha}}{\alpha}.$$

Здесь для оценки величины погрtшности достаточно приближения $\operatorname{tg}(\alpha/2) \approx \alpha/2$.

6. Постройте график зависимости υ от x и найдите линейную аппроксимацию методом наименьших квадратов. Определите коэффициент наклона A в формуле $\upsilon = Ax$ и соответствующую погрешность. Результаты запишите в табл. 7.1.

7. Из (7.20) следует, что коэффициент жесткости пружины равен $k = A^2 \cdot m$. Вычислите значение k.

8. Рассчитайте стандартное отклонение S_k для коэффициента жесткости k по формуле для косвенных измерений:

$$S_k = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial m}\right)^2 \cdot S_m^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial A}\right)^2 \cdot S_A^2}.$$

Результаты пп. 7, 8 запишите в табл. 7.1.

Основные итоги работы

В результате выполнения работы должны быть измерены скорости пули при нескольких значениях степени сжатия пружины пушки, а также определено значение жесткости пружины.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте закон сохранения импульса.
2. Что такое момент импульса относительно точки?
3. Сформулируйте закон сохранения момента импульса.
4. Сформулируйте закон сохранения механической энергии.
5. Сколько законов сохранения использовано для вывода (7.22)? Какие?
6. Что такое момент импульса тела относительно оси?
7. Что называется центром удара? Как его найти?
8. Что получится при измерении скорости, если пуля попадет в центр удара, но под углом α к горизонтали?