МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. Ломоносова

Физический факультет
кафедра общей физики и физики конденсированного состояния

Методическая разработка
по общему физическому практикуму

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

(теоретическое введение к задачам №1 и №2 из раздела «Электричесво и магнетизм»)

Доцент Пустовалов Г.Е.

Москва - 2012

Подготовил методическое пособие к изданию доц. Авксентьев Ю.И.

ПОНЯТИЕ ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Для описания взаимодействия электрических зарядов между собой вводится понятие об электрическом поле. Предполагается, что каждый заряд в пространстве создает вокруг себя нечто материальное, называемое *электрическим полем*. Это поле действует на другой заряд в той точке пространства, где этот заряд находится.

Таким образом, основным свойством электрического поля является то, что на заряд, помещенный в любую точку пространства, где имеется поле, действует сила. Электрическое поле обладает также рядом других свойств, которые могут быть выяснены только при более глубоком его изучении. В частности, оно распространяется со скоростью света, обладает энергией и импульсом. В электростатике, т.е. в том случае, когда все характеристики поля остаются неизменными с течением времени, взаимодействие зарядов можно описать и без понятия об электрическом поле. Однако многие задачи электростатики гораздо проще решаются методами, использующими описание взаимодействия зарядов при помощи электрического поля, чем непосредственно при помощи закона Кулона. Понятие об электрическом поле становится совершенно необходимым для описания явлений, связанных с движением зарядов. При этом оказывается, что переменное электрическое поле вместе с переменным магнитным полем образуют единое электромагнитное поле, которое может существовать в виде электромагнитных волн отдельно от зарядов, бывших первоначально причиной возникновения поля.

Напряженность электрического поля

Наличие электрического поля в какой-либо точке пространства можно установить по действию силы на помещенный в эту точку заряд. Поместив этот же заряд в другую точку поля, мы снова обнаружим действие на него силы, хотя возможно, что величина и направление этой силы будут уже другими. Заряд, при помощи которого обнаруживается электрическое поле, называется *пробным зарядом*. Пробный заряд должен быть достаточно мал по своим геометрическим размерам, т.е. быть точечным, чтобы его можно было считать находящимся в рассматриваемой точке поля. Он также должен быть мал и по величине заряда, чтобы не вызывать заметных изменений в расположении окружающих зарядов и, тем самым, не искажать поля, которое существовало до его внесения.

В качестве основной характеристики электрического поля принимается векторная величина, которая называется напряженностью: напряжённость $\vec{E}$ в данной точке поля равна отношению силы $\vec{f}$, действующий на неподвижный пробный заряд, помещённый в эту точку, к величине q_0 пробного заряда, т.е.

$$\vec{E} = \frac{\vec{f}}{q_0}. \qquad (1)$$

Вектор $\vec{E}$ не зависит от q_0, а зависит только от свойств электрического поля в данной точке. В самом деле, величина и направление силы, действующей на пробный заряд в какой-либо точке поля, зависит, с одной стороны, от расположения и величин зарядов, создающих это поле, и, с другой стороны, от величины пробного заряда. В частности, если поле создается точечным зарядом величины q, а пробный заряд помещен на расстоянии r от него, то на пробный заряд действует сила, величина которой согласно закону Кулона (в системе единиц СИ) равна

$$\vec{f} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (2)$$

(здесь ε_0 = $8{,}85\cdot 10^{-12}$ Кл/(В м) - электрическая постоянная). Заряженное тело произвольной формы можно рассматривать как совокупность малых зарядов, близких к точечным. Как показывает опыт, для электрических сил справедлив *принцип суперпозиции*, согласно которому сила, действующая на пробный заряд, равна векторной сумме сил, действующих на него со стороны этих малых зарядов. В каждое слагаемое такой суммы войдет множителем величина пробного заряда. В результате, сила, действующая на пробный заряд со стороны любого заряженного тела или произвольной системы зарядов, оказывается пропорциональной величине q_0. В отношении (1) величина q_0 сокращается, и поэтому $\vec{E}_0$ не зависит от неё.

Линии напряженности электрического поля

Для наглядности электрическое поле изображают при помощи *линий напряженности* (силовых линий). Это воображаемые линии, касательные к которым во всех точках имеют направления, совпадающие с направлением векторов напряженности в этих точках. Напряженность электрического поля изменяется непрерывно во всех областях пространства, где нет электрических зарядов. Поэтому в этих областях *непрерывны* и линии напряженности: они могут начинаться и оканчиваться лишь на зарядах или в бесконечности. Принято считать, что они выходят из положительных зарядов и входят в отрицательные. Линии напряженности друг с другом пересекаться не могут, иначе в точке пересечения существовало бы одновременно два различных направления силы, действующей на пробный заряд[1].

Нужно, однако, иметь в виду, что линии напряженности вводятся только для наглядности. Во всех расчетах можно обойтись без них. Обратим внимание также на то, что заряд в электрическом поле движется, вообще говоря, не вдоль линии напряженности. Движение заряда вдоль линии напряженности происходит только в том случае, если линия представляет собой прямую, и начальная скорость заряда направлена по этой прямой или равна нулю.

[1] За исключением кажущихся пересечений в отдельных особых точках. Однако в этих точках напряженность равна нулю, и ее направление остается неопределенным (см., например, на рис.12 точку, лежащую на середине отрезка, соединяющего два одноименных равных заряда).

Поток напряжённости

Потоком вектора напряжённости электрического поля через элементарную площадку называется величина

$$d\Phi = EdS\cos\alpha = E_n dS. \qquad (3)$$

Здесь E - величина вектора напряженности в области, где находится площадка, dS - её площадь, α - угол между направлением вектора напряженности и нормалью $\vec{n}$ к площадке, $E_n = E\cos\alpha$ - проекция напряженности электрического поля на направление нормали (рис.1). Площадка предполагается практически плоской и настолько малой, что напряженность во всех её точках можно считать одинаковой по величине и направлению.

Поток напряжённости через произвольную поверхность S представляет собой сумму потоков через элементарные площадки, на которые разбита эта поверхность, и выражается в виде интеграла по этой поверхности:

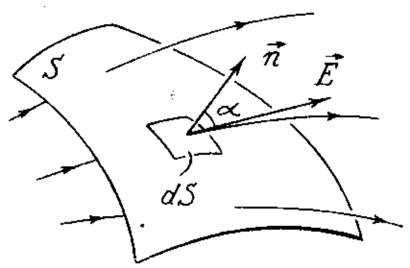

Рис. 1

$$\Phi = \int_S E_n dS, \qquad (4)$$

Обычно линии напряженности проводят так, чтобы плотность их (число линий, пересекающих перпендикулярную к ним единичную площадку) была равна величине напряженности. При этом условии поток напряженности через некоторую поверхность равен числу линий, пересекающих эту поверхность. Действительно, как видно из рис.2, через малую площадку dS и её проекцию $dS_\perp$, на плоскость, перпендикулярную направлению напряженности, проходит одинаковое число линий $dN = EdS_\perp$. Но $dS_\perp = dS\cos\alpha$, где α - двугранный угол между площадками, равный углу между нормалью $\vec{n}$ к площадке dS и направлением вектора напряженности $\vec{E}$ (углы со взаимно перпендикулярными сторонами). Таким образом,

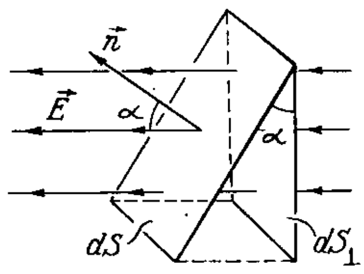

Рис. 2

$$dN = EdS_\perp = EdS\cos\alpha. \qquad (5)$$

Сравнивая формулы (5) и (3), убеждаемся в справедливости утверждения о том, что поток $d\Phi$ через площадку dS равен числу линий напряжённости, пересекающих эту площадку.

Знак потока зависит от угла между вектором напряженности и нормалью к поверхности и, следовательно, от выбора направления нормали. При определении потока через замкнутую поверхность принято выбирать внешнюю нормаль к поверхности.

ТЕОРЕМА ГАУССА

Найдем поток $d\Phi$ напряженности электрического поля, создаваемого точечным зарядом q, через произвольную элементарную площадку dS, расположенную от заряда на расстоянии r, значительно превышающем её размеры (рис.3). Величину вектора напряженности в том месте, где расположена площадка, найдем, поделив выражение (2) на q_0. Подставим полученное выражение в формулу (3). В результате получится

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dS \cdot \cos\alpha .$$

Здесь угол α между вектором напряженности $\vec{E}$, направленным вдоль линии, идущей от заряда к площадке, и нормалью к площадке $\vec{n}$, зависит от ориентации площадки. Учитывая, что $dS \cdot cos\alpha = dS_\perp$ получим отсюда

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dS_\perp}{r^2} \qquad (6)$$

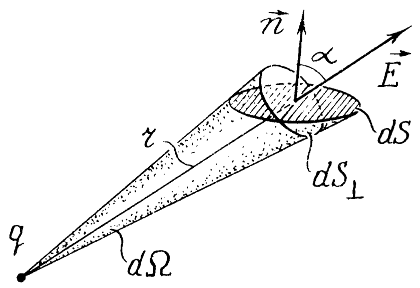

Рис. 3

Примем во внимание, что величина $dS_\perp / \ r^2$ по определению является значением элементарного телесного угла $d\Omega$, составляющего часть пространства, выделенную конической поверхностью с вершиной в точке, где находится заряд q, и опирающийся на площадку $dS_\perp$. При малых размерах площадки $dS_\perp$, когда образующие конической поверхности практически параллельны, эта поверхность проходит также и через края площадки dS . Таким образом, из (6) следует, что

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega \, , \qquad (7)$$

т.е. поток напряженности электрического поля, создаваемого точечным зарядом, через площадку dS не зависит от формы площадки, ее ориентации в пространстве и расстояния до заряда и определяется лишь величиной q заряда и телесным углом $d\Omega$, опирающимся на площадку.

Возьмем теперь замкнутую поверхность S, окружающую точечный заряд q (рис.4,а). Для простоты сначала предположим, что поверхность S выпуклая. Найдем поток Φ напряженности поля, создаваемого зарядом q, через эту поверхность. Для этого построим конические поверхности, выделяющие элементарный телесные углы $d\Omega$ с вершинами в точке, где находится заряд q, и заполняющие все пространство вокруг этой точки. При пересечении этих конических поверхностей с поверхностью S на последней образуются элементарные площадки dS, заполняющие всю поверхность. Потоки $d\Phi$ через эти площадки определяются формулой (7). Полный поток Φ через всю поверхность найдем, суммируя потоки через площадки dS:

$$\Phi = \int_S d\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_S d\Omega. \tag{8}$$

Интегрирование сводится к нахождению суммарного телесного угла $\int_S d\Omega$, составляющего все пространство вокруг точки, в которой находится заряд q. Как известно, такой телесный угол равен 4π. Таким образом,

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}. \tag{9}$$

Если при подсчете потока взята внешняя нормаль к поверхности, то поток через каждую элементарную площадку будет положительным при $q > 0$ (напряженность направлена от заряда, и угол между ее направлением и нормалью в случае выпуклой поверхности меньше $\frac{\pi}{2}$) и отрицательным при $q < 0$. Следовательно, формула (9) верна в алгебраическом смысле - при изменении знака заряда q на обратный изменяется и знак потока Φ.

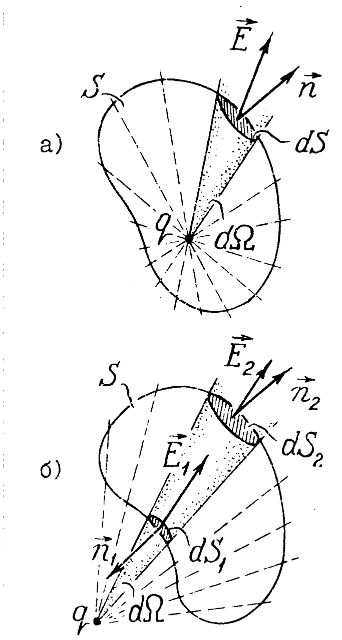

Рис. 4

Пусть заряд q находится вне замкнутой поверхности. Построив узкие конические поверхности с вершиной в точке, где находится заряд, можно выделить на поверхности S внутри одного и того же телесного угла $d\Omega$ две элементарные площадки dS_1 и dS_2 (рис.4,б). Потоки напряженности через эти площадки будут иметь одинаковую величину, так как они определяются одним и тем же телесным углом. Однако знаки потоков будут противоположными: если, например, заряд q положительный, то угол между направлением напряжённости и нормалью в случае площадки dS_1 тупой ($\cos\alpha < 0$), а в случае площадки dS_2 - острый ($\cos\alpha > 0$). При суммировании потоки через элементарные площадки, выделенные на поверхности S коническими поверхностями, попарно взаимно уничтожаются, и полный поток Φ через всю замкнутую поверхность S оказывается равным нулю. Итак,

$$\Phi = \begin{cases} \dfrac{q}{\varepsilon_0}, & \textit{если } q \textit{ внутри поверхности,} \\ 0, & \textit{если } q \textit{ вне поверхности.} \end{cases} \tag{10}$$

Если поверхность S не выпуклая, а имеет более сложную форму, то конические поверхности с вершинами в точке, где расположен заряд, могут пересекать ее по нескольку раз. Однако результат (10) остается в силе. Действительно, как видно из рис. 5,а , если заряд находится внутри замкнутой поверхности, то конические поверхности выделяют на ней нечетное число площадок, причем при суммировании некомпенсированным остается только поток через одну из них. Следовательно, при суммировании телесных углов в формуле (8) каждый из них следует брать лишь один раз, как и в случае выпуклой поверхности. Если же заряд находится вне замкнутой поверхности S (рис. 5, б), то при пересечении ее конической поверхностью происходит выделение четного числа площадок, и при суммировании потоки через эти площадки компенсируются попарно.

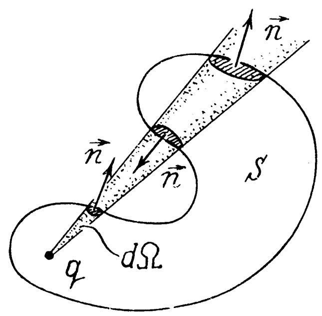

Рис. 5,а

Пусть теперь имеется система зарядов. Вследствие принципа суперпозиции напряженность электрического поля, создаваемого системой зарядов, равна векторной сумме напряженностей, создаваемых каждым зарядом в отдельности. Отсюда следует, что поток Φ напряженности поля, создаваемого системой зарядов, через какую-либо поверхность складывается из потоков Φ_i через эту поверхность напряженностей, создаваемых отдельными зарядами q_i. Если имеется произвольная замкнутая поверхность S, включающая в себя часть зарядов системы, то согласно (10) те из них, которые оказываются внутри поверхности, дадут вклады (с учетом их знаков) в общий поток напряженности через эту поверхность. Находящиеся вне поверхности S заряды ничего не вносят в общий поток. Таким образом, отсюда вытекает следующее утверждение, которое мы будем называть *теоремой Гаусса* для напряженности электрического поля: *поток напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен поделённой на* ε_0 *алгебраической сумме зарядов, находящихся внутри этой поверхности.*

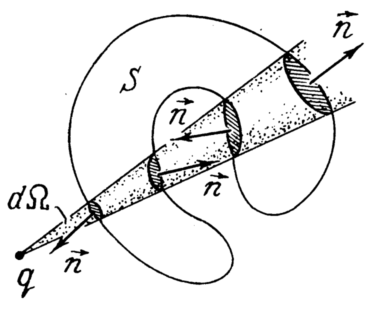

Рис. 5,б

Приняв во внимание выражение (4) для потока напряженности, запишем теорему Гаусса в математической форме:

$$\Phi = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i \quad (\text{внутри } S) \qquad (11)$$

Здесь кружок на интеграле означает, что суммирование производится по замкнутой поверхности.

Применение теоремы Гаусса

Теорема Гаусса используется 1) для установления ряда общих свойств электрического поля, 2) для нахождения зарядов в области, внутри которой известна напряженность электрического поля, 3) для нахождения напряженности электрического поля, создаваемого зарядами, распределенными в пространстве с высокой степенью симметрии. Кроме того, теорема Гаусса верна не только в электростатике, но также и в случае переменных электромагнитных полей. Она входит в качестве одного из четырех уравнений в систему уравнений Максвелла, описывающую весь круг электромагнитных явлений. Здесь мы будем так или иначе обращаться к теореме Гаусса в указанных выше целях.

1. Пусть имеется область, в которой отсутствуют заряды, но имеется электрическое поле, причем линии напряженности этого поля не параллельны между собой, т.е. густота их меняется в направлении напряжённости (рис. 6). Выберем мысленно поверхность в виде трубки так, чтобы линии напряженности лежали на этой поверхности. Построив два поперечных сечения S_1, и S_2, образуем замкнутую поверхность S.

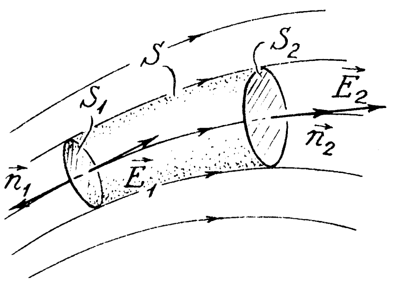

Рис. 6

Предположим, что трубка настолько узка, что во всех точках каждого из сечений векторы напряженности одинаковы по величине и перпендикулярны плоскости сечения. Подсчитаем поток Φ напряженности через поверхность S. Он складывается из потока $\Phi_{бок}$ через боковую поверхность трубки и потоков Φ_1 и Φ_2 через поперечные сечения S_1 и S_2. Так как во всех точках боковой поверхности напряженность направлена вдоль нее и проекция напряженности на нормаль к поверхности равна нулю, то $\Phi_{бок} = 0$. В точках сечения S_1 напряженность $\vec{E}_1$ направлена в сторону, противоположную внешней нормали $\vec{n}_1$. Поэтому проекция напряженности на направление нормали равна величине напряженности, взятой со знаком минус, и, следовательно, $\Phi_1 = -E_1 S_1$. В точках сечения S_2 направления внешней нормали и напряженности совпадают, поэтому $\Phi_2 = E_2 S_2$. Таким образом, полный поток через всю замкнутую поверхность S равен $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = E_2 S_2 - E_1 S_1$. Так как по условию внутри поверхности зарядов не имеется, то согласно теореме Гаусса $\Phi = 0$. Следовательно, $E_1 S_1 = E_2 S_2$. Это означает, что вдоль всей трубки для любого ее поперечного сечения произведение напряженности на площадь сечения есть постоянная величина, и, стало быть, там где площадь сечения трубки меньше (линии напряженности идут гуще), напряженность должна быть больше, и наоборот.

2. При симметричном распределении заряда в пространстве определенную симметрию имеет и электрическое поле. Опираясь на эту симметрию, зачастую можно судить о качественных свойствах поля: как идут линии напряженности, в каком направлении напряженность возрастает, где она имеет одинаковые значения и т.д. Если при этом удается подобрать подходящую замкнутую поверхность, то появляется возможность, используя теорему Гаусса, найти величину напряженности в различных точках пространства. Для этого замкнутая поверхность должна окружать заряд (или известную часть заряда) и состоять из участков только двух типов: либо напряженность во всех точках участка одинакова и перпендикулярна поверхности, либо напряженность параллельна поверхности. В первом случае поток напряженности через участок равен произведению площади участка на величину напряженности (величину $E_n = E = const$ в (4) можно вынести из под знака интеграла, а интеграл от dS равен площади участка); во втором случае поток через участок равен нулю при любой величине напряженности. Участки второго типа при вычислении полного потока через всю поверхность учитывать не надо.

Найдем напряженность электрического поля, создаваемого зарядом, распределенным равномерно с постоянной поверхностной плотностью σ по поверхности бесконечно длинного цилиндра радиуса a. Легко видеть, что вследствие симметричного распределения заряда на пробный заряд, помещенный вблизи цилиндра будет действовать сила, направленная по радиальной линии, т.е. линии, проходящей через ось цилиндра перпендикулярно ей. Линиями напряженности в этом случае будут радиальные прямые. Благодаря симметрии во всех точках, лежащих на равных расстояниях от оси цилиндра, напряженность должна иметь одинаковую величину.

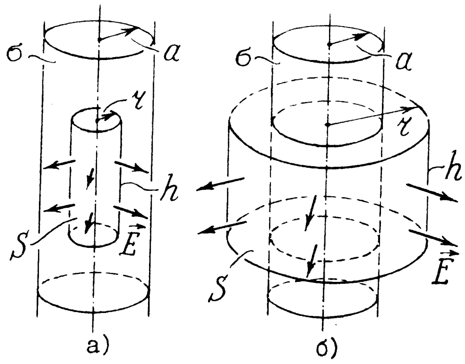

Рис. 7

Чтобы найти величину $E(r)$ напряженности на расстоянии r от оси цилиндра, выберем замкнутую поверхность S, имеющую также вид цилиндра, коаксиального данному, с радиусом r и высотой h, ограниченного плоскими основаниями, перпендикулярными оси. При $r < a$ поверхность S лежит внутри заряженного цилиндра (рис.7,а), при $r > a$, наоборот, часть заряженного цилиндра лежит внутри поверхности S (рис.7,б). Определим поток напряженности через поверхность S.

Во всех точках цилиндрического участка этой поверхности напряженность направлена перпендикулярно поверхности и имеет одинаковую величину $E(r)$ (участок первого типа). Площадь этого участка $S_{цил} = 2\pi rh$. Поток напряженности через него

$$\Phi = E(r) \cdot S_{цил} = E(r) \cdot 2\pi rh. \qquad (12)$$

На двух других участках поверхности S (основаниях) напряженность параллельна поверхности (участки второго типа). Потоки напряженности через них равны нулю. Таким образом, выражение (12) и определяет полный поток через всю замкнутую поверхность S.

При $r < a$ поверхность не содержит внутри себя зарядов. Согласно теореме Гаусса поток через нее должен быть равен нулю. При $r > a$ внутри поверхности S попадает заряд, находящийся на части поверхности данного цилиндра, площадь которой равна $2\pi ah$. Величина этого заряда $q = 2\pi ah\sigma$. В этом случае поток через поверхность S должен быть равен $\frac{q}{\varepsilon_0}$ Таким образом,

$$\Phi = E(r) \cdot 2\pi rh = \begin{cases} 0 \;\; при \; r < a \\ \dfrac{2\pi ah\sigma}{\varepsilon_0} \;\; при \; r > a. \end{cases}$$

Отсюда находим искомую зависимость величины напряженности от r:

$$E(r) = \begin{cases} 0 \;\; при \; r < a \\ \dfrac{a\sigma}{\varepsilon_0 r} \;\; при \; r > a. \end{cases} \qquad (13)$$

Итак, внутри бесконечного цилиндра, равномерно заряженного по поверхности, электрическое поле отсутствует. Вне цилиндра напряженность убывает обратно пропорционально расстоянию от его оси.

РАБОТА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ СИЛ НАД ЗАРЯДОМ

Напомним, что работой силы $\vec{f}$ на элементарном перемещении $d\vec{l}$ точки приложения силы называется величина $dA = fdl\cos\alpha = f_l dl$, где α - угол между направлениями силы и перемещения, а $f_l = f\cos\alpha$ - проекция силы на направление перемещения. Работа на конечном участке BC траектории, по которой перемещается точка приложения силы, складывается из работ, произведенных на элементарных участках траектории, и определяется интегралом

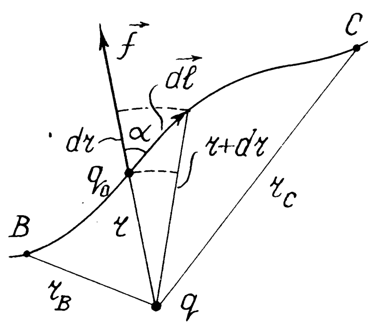

Рис. 8

$$A_{BC} = \int_B^C f\cos\alpha dl = \int_B^C f_l dl. \qquad (14)$$

Сила, действующая на пробный заряд q_0 со стороны электрического поля, напряженность которого $\vec{E}$, равна $\vec{f} = q_0\vec{E}$. Поэтому для элементарной работы электростатического поля над зарядом q_0 имеем

$$dA = q_0 E dl \cos\alpha = q_0 E_l dl. \tag{15}$$

и для работы на конечном участке BC траектории заряда –

$$A_{BC} = q_0 \int_B^C E \cos\alpha dl = q_0 \int_B^C E_l dl. \tag{16}$$

Вычислим работу электростатической силы, действующей на пробный заряд q_0 в поле точечного заряда q. Подставляя в формулу (14) выражение (2) для силы, действующей со стороны точечного заряда на пробный заряд, и замечая, что $\cos\alpha \cdot dl = dr$ - изменение расстояния r между зарядами q и q_0, соответствующее перемещению $d\vec{l}$ (рис.8), получим

$$A_{BC} = \int_B^C f \cos\alpha dl = \int_B^C \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \int_B^C \frac{dr}{r^2} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_C}\right), \tag{17}$$

где r_B и r_C - расстояния от заряда q до начальной и конечной точек траектории заряда q_0. Из (17) следует, что работа A_{BC} зависит только от положений начальной B и конечной C точек траектории и не зависит от ее формы, так как при выводе последняя предполагалась произвольной.

Пользуясь принципом суперпозиции, легко показать, что вывод о независимости работы электростатических сил от формы траектории пробного заряда справедлив и в случае поля, создаваемого произвольной системой зарядов. Следствием независимости работы электростатических сил от формы траектории заряда является то, что при возвращении заряда в начальную точку другим путем (при обходе им контура) работа этих сил оказывается равной нулю. Напомним, что такие силы называются **консервативными**, или **потенциальными**.

Подчеркнем, что это верно лишь в случае электростатики. Работа электрических сил над зарядом в переменном электромагнитном поле при обходе зарядом замкнутого контура, вообще говоря, не равна нулю.

Потенциал и разность потенциалов

Возьмем в некоторой области электростатического поля фиксированную точку C. Как было сказано ранее, работа A_{BC}, которую совершат над пробным зарядом q_0 электростатические силы при его перемещении из какой-либо точки B в точку C не зависит от траектории заряда. Отношение этой работы к величине q_0, равное согласно (16)

$$\varphi_B = \frac{A_{BC}}{q_0} = \int_B^C E_l dl, \tag{18}$$

не зависит также и от q_0 Значение φ_B определяется, таким образом, свойствами поля в данной области и выбором точки B и поэтому может служить характеристикой поля в точке B. Величина φ_B называется **потенциалом** точки B электростатического поля. Если точка B совпадает с точкой C, то в

(18) пределы интеграла оказываются одинаковыми, и, следовательно, потенциал обращается в нуль. Стало быть, выбором точки C определяется точка поля, в которой значение потенциала принимается за нуль. Если область, в которой распределены заряды, создающие поле, ограничена, то при расчетах в качестве точки с нулевым значением потенциала обычно выбирается бесконечно удаленная точка. На практике часто считают, что нулевой потенциал имеют проводники, связанные с землей.

Положив в формуле (17) $r_C = \infty$ и $r_B = r$, найдем выражение для потенциала поля точечного заряда q на расстоянии r от него, если за нуль принять потенциал бесконечно удаленной точки:

$$\varphi(r) = \frac{A_{B\infty}}{q_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}. \qquad (19)$$

Из принципа суперпозиции для электрического поля следует, что, представив произвольное распределение зарядов в виде системы точечных зарядов, вычисление потенциала поля в любом случае можно свести к нахождению суммы потенциалов точечных зарядов.

Разностью потенциалов точек B и D (напряжением между точками B и D) электростатического поля называется величина

$$U_{BD} = \varphi_B - \varphi_D. \qquad (20)$$

Если в качестве линии, вдоль которой вычисляется интеграл в формуле (18), взять линию BDC (рис.9), то разность потенциалов точек B и D можно представить в виде

$$U_{BD} = \int_B^C E_l dl - \int_D^C E_l dl = \int_B^D E_l dl + \int_D^C E_l dl - \int_D^C E_l dl = \int_B^D E_l dl. \qquad (21)$$

Сравнивая формулы (21) и (16), найдем, что работа A_{BD}, совершаемая электростатическими силами над зарядом q при его перемещении из точки B в точку D, равна

$$A_{BD} = qU_{BD} = q(\varphi_B - \varphi_D). \qquad (22)$$

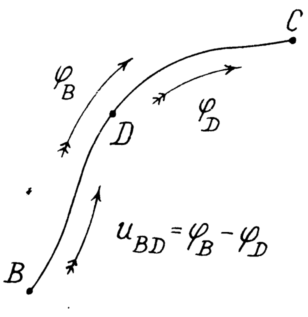

Рис. 9

Разность потенциалов dU между точками, лежащими на концах элементарного отрезка $d\vec{l}$, равна подынтегральному выражению в (21), т.е.

$$dU = E_l dl = E\cos\alpha \cdot dl. \qquad (23)$$

Здесь α - угол между направлениями напряженности и отрезка $d\vec{l}$.

Следует обратить внимание на то, что при вычислении разности потенциалов (20) из потенциала точки B, принятой за начальную, вычитается потенциал точки D, принятой за конечную, в то время как в математике изменение какой-либо величины определяется разностью ее конечного и начального значений. Поэтому изменение (приращение) потенциала $\Delta\varphi = \varphi_D - \varphi_B$ между точками B и D имеет обратный знак по сравнению с разностью потенциалов этих точек, т.е. $\Delta\varphi = -U_{BD}$. Это касается и элементарного приращения потенциала $d\varphi$, которое согласно (23) должно быть равно

$$d\varphi = -du = -E_l dl = -E\cos\alpha \cdot dl\,. \qquad (24)$$

СВЯЗЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕННОСТЬЮ И ПОТЕНЦИАЛОМ

Если известно распределение напряженности $\vec{E}$ в некоторой области электрического поля и точка C, в которой потенциал принят за нуль, лежит в этой же области, то, пользуясь формулой (18), можно найти потенциал произвольной точки B, находящейся в данной области. Линию, идущую от точки B до точки C, вдоль которой производится интегрирование в (18), можно выбрать произвольно, сообразуясь лишь с удобствами вычисления. Таким образом, если распределение напряженности известно, то можно найти и распределение потенциала.

Покажем обратное - как по известному распределению потенциала найти величину и направление напряженности в произвольной точке поля. Пусть в окрестности точки P известно распределение потенциала. Будем откладывать от точки P по всем возможным направлениям отрезок $d\vec{l}$. Концы этого отрезка будут лежать на сфере радиуса dl с центром в точке P (рис. 10). Так как потенциал считается известным во всех точках, то для каждого направления отрезка $d\vec{l}$ можно найти приращение потенциала $d\varphi$ на расстоянии от точки P до конца отрезка $\overline{dl}$. Из формулы (24) следует, что проекция $E_l = E\cos\alpha$ вектора напряженности $\vec{E}$ на направление отрезка $d\vec{l}$ равна взятому с обратным знаком отношению приращения потенциала $d\varphi$ вдоль отрезка к величине отрезка dl:

$$E_l = -\frac{d\varphi}{dl}\,. \qquad (25)$$

С математической точки зрения выражение $\frac{d\varphi}{dl}$ представляет собой производную потенциала по направлению вектора $d\vec{l}$ (предполагается, что величину dl следует устремить к нулю). Величина этой производной характеризует быстроту изменения потенциала в направлении dl, а знак показывает, возрастает или убывает потенциал в этом направлении. Если в качестве направления отрезка $d\vec{l}$ взять направление вектора $\vec{E}$ ($\alpha = 0$), то величина E_l примет максимальное значение, равное E. В этом случае максимальное значение будет иметь и правая часть выражения (25), т.е.

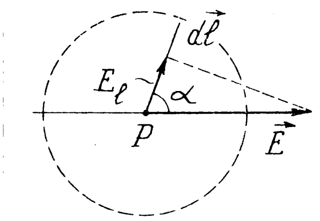

Рис. 10

$$E=-\left(\frac{d\varphi}{dl}\right)_{макс}. \qquad (26)$$

Таким образом, в точке P электрического поля вектор напряжённости $\vec{E}$ направлен в сторону наибыстрейшего убывания потенциала и по абсолютной величине равен взятой с обратным знаком производной потенциала по этому направлению.

Вектор, имеющий направление наибыстрейшего возрастания функции φ, зависящей от координат, величина которого равна производной функции φ по этому направлению, называется *градиентом функции* φ и обозначается $g\vec{r}ad\ \varphi$. Таким образом, согласно (26) $\vec{E}=-g\vec{r}ad\ \varphi$.

Эквипотенциальные поверхности

Геометрические места точек, имеющих одинаковые значения потенциала, называют *поверхностями равного потенциала*, или *эквипотенциальными поверхностями* (эквипотенциалями). Из формулы (24) следует, что изменение потенциала равно нулю ($d\varphi=0$) в направлении, перпендикулярном вектору напряженности. Таким образом, потенциал остается постоянным на участке поверхности, перпендикулярном линии напряженности (рис.11). Следовательно, если известны эквипотенциальные поверхности в какой-либо области электростатического поля, то можно построить линии напряженности, проведя их так, чтобы они пересекали эквипотенциальные поверхности под прямыми углами. На чертежах обычно изображаются эквипотенциальные линии, представляющие собой линии пересечения эквипотенциальных поверхностей плоскостью чертежа. На рис.12 показаны для примера эквипотенциальные линии (сплошные) и линии напряженности (штриховые) электрического поля, создаваемого двумя шарами, заряженными одноименными равными по величине зарядами.

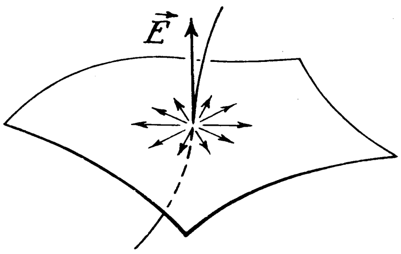

Рис. 11

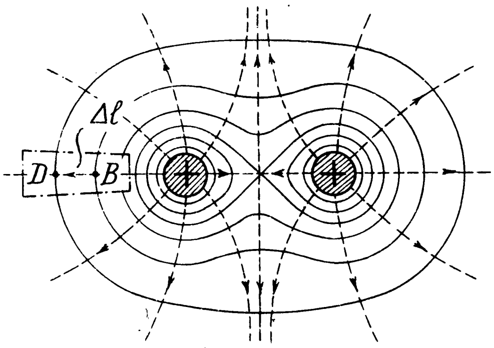

Рис. 12

Пусть эквипотенциальные поверхности с потенциалами φ_B и φ_D проведены так близко друг к другу что в рассматриваемой области (например, в области, выделенной на рис. 12 штрихпунктирными линиями) электрическое поле можно считать однородным. Свяжем разность потенциалов точек B и D, находящихся на этих эквипотенциальных поверхностях и лежащих на одной линии напряженности, с величиной напряженности E в этой области. Обратившись к формуле (21), учтем, что интегрирование в данном случае проводится вдоль линии напряженности и что напряженность предполагается всюду одинаковой, т.е. $E_l = E = const$. Поэтому

$$U_{BD} = \varphi_B - \varphi_D = E\int_B^D dl = E\Delta l\,, \qquad (27)$$

где $\Delta l = \int_B^D dl$ - расстояние между эквипотенциалями. Отсюда следует, что

$$E = \frac{\varphi_B - \varphi_D}{\Delta l} = \frac{U_{BD}}{\Delta l}. \qquad (28)$$

т.е. величина напряженности обратно пропорциональна расстоянию Δl между эквипотенциалями. Если на чертежах семейство эквипотенциалей изображать так, что разности потенциалов между двумя любыми соседними эквипотенциалями одинаковы, то по густоте эквипотенциалей можно судить о напряженности поля: напряженность больше в тех местах, где эквипотенциали идут теснее.

ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Как известно, проводники отличаются от изоляторов тем, что они содержат так называемые свободные заряды, которые могут легко перемещаться внутри проводника на макроскопические расстояния. В металлических проводниках свободными зарядами являются электроны, в электролитах - ионы разных знаков. При помещении проводника в постоянное электрическое поле или при сообщении ему заряда в проводнике происходит перераспределение зарядов. Как показывает опыт, движение зарядов, в конце концов, прекращается. Из самого факта наступления равновесия следует, что напряженность электрического поля внутри проводника в случае электростатики должна быть равна нулю, иначе на свободные заряды в проводнике действовала бы сила, и их движение не могло бы прекратиться. Направление напряженности вне проводника в непосредственной близости к его поверхности должно быть перпендикулярным поверхности, т.е. таким, чтобы не было составляющей напряженности вдоль поверхности.

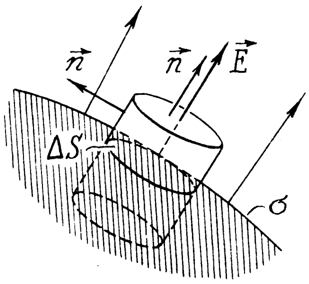

Рис. 13

В отсутствии электрического поля проводник обычно нейтрален. Он содержит одинаковое количество разноименных зарядов, которые распределены внутри него равномерно, так что происходит их полная взаимная компенсация. Например, в металлических проводниках отрицательный заряд свободных электронов компенсируется положительным зарядом ионов, образующих кристаллическую решетку. Нескомпенсированные заряды на проводниках (помещенные на проводник извне или появившиеся в результате перераспределения зарядов под действием электрического поля) могут находиться только на поверхности проводника. Это легко установить с помощью теоремы Гаусса. В самом деле, поскольку внутри проводника в случае электростатики напряженность равна нулю, то поток вектора напряженности через любую замкнутую поверхность, целиком лежащую внутри проводника, также равен нулю. Следовательно, внутри такой области либо нет зарядов, либо величина отрицательных зарядов равна величине положительных.

Найдем связь между напряженностью $\vec{E}$ электрического поля вблизи какого-либо участка поверхности проводника и поверхностной плотностью σ заряда на этом участке. Эту связь можно установить при помощи теоремы Гаусса. Возьмем замкнутую поверхность в виде цилиндра, образующие которого перпендикулярны поверхности проводника, а основания параллельны поверхности, причем одно из них лежит внутри проводника, другое же - снаружи на малом расстоянии от поверхности (рис.13). Пусть площадь оснований ΔS. Тогда внутри цилиндра попадает заряд $\Delta q = \sigma \Delta S$. Поток напряженности через часть поверхности цилиндра, находящуюся внутри проводника, равен нулю, так как внутри проводника $\vec{E} \equiv 0$. Поток напряженности через находящуюся вне проводника часть боковой поверхности цилиндра также равен нулю, вследствие того, что вблизи проводника линии напряженности идут вдоль этой поверхности. Отличен от нуля только поток через внешнее основание цилиндра. Он равен $\Phi = E_n \Delta S$ где E_n - проекция вектора напряженности на нормаль к основанию, равная по величине напряженности. Согласно теореме Гаусса

$$\Phi = E_n \Delta S = \frac{\Delta q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0}.$$

Отсюда

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \tag{29}$$

т.е. проекция напряженности поля вблизи поверхности проводника на нормаль к поверхности пропорциональна поверхностной плотности заряда на этом участке поверхности. Знак E_n определяется знаком σ. Если на данном участке поверхности находится положительный заряд, то $E_n > 0$, и линии напряженности идут от проводника. При отрицательном заряде на поверхности линии напряженности идут к проводнику.

Вследствие взаимного отталкивания одноименных зарядов плотность заряда, как правило, больше на выпуклых участках поверхности проводника, что особенно заметно вблизи заострений поверхности. Из (29) следует, что напряженность электрического поля около этих участков поверхности проводника должна быть также больше – линии напряженности и эквипотенциальные поверхности идут в таких местах более тесно.