

## 13

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ СДВИГА С ПОМОЩЬЮ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

## Цель работы

Экспериментальное определение модуля кручения и расчет модуля сдвига для разных материалов. Установление зависимости модуля кручения от геометрических размеров стержней.

## Идея эксперимента

Используя зависимость периода колебаний крутильного маятника от модуля кручения стержня  $f$  и момента инерции маятника  $J$ , определяется  $f$ , а затем и модуль сдвига материала  $G$ .

## Теоретическое введение

**Деформация сдвига.** В данной задаче при колебаниях крутильного маятника происходит *деформация кручения* стержня. Любая деформация сводится к двум элементарным типам – деформации сжатия/растяжения и деформации сдвига. Деформация кручения представляет собой проявление деформации неоднородного сдвига. Рассмотрим ее особенности.

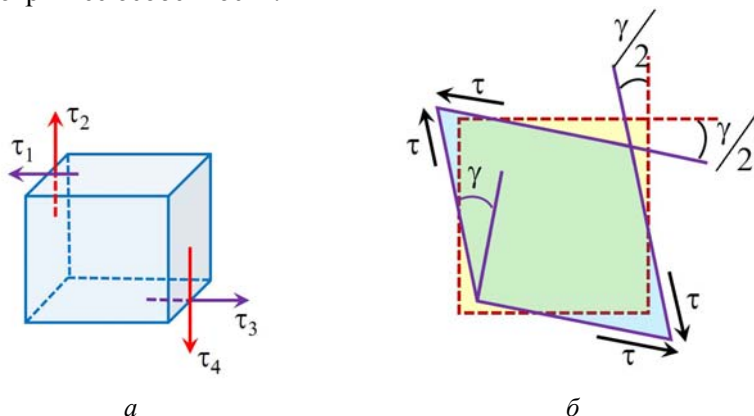


Рис. 13.1. Деформация тела кубической формы под действием распределенных касательных сил.

Рассмотрим деформацию кубика из однородного изотропного материала под действием распределенных **касательных** сил, приложенных к его противоположным граням. Для соблюдения условий

равновесия кубика необходимо равенство всех касательных напряжений, приложенных к его граням (рис. 13.1 а):

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4. \quad (13.1)$$

Здесь  $\tau_i$  – касательные напряжения, определяемые как отношение силы, действующей на соответствующую грань ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), к площади этой грани. Действительно, отсутствие поступательного движения кубика как целого возможно, если

$$\tau_1 = \tau_3, \quad \tau_2 = \tau_4,$$

а отсутствие вращательного движения имеет место, если

$$\tau_1 = \tau_4, \quad \tau_2 = \tau_3,$$

что и доказывает условие (13.1).

При изменении напряжений ( $\tau_1 - \tau_4$ ) будут меняться только углы между гранями кубика, но не его объем (см. рис. 13.1 б). Пусть под действием этих напряжений углы между соответствующими гранями изменятся на малый угол  $\gamma$ . Опыт показывает, что для многих материалов при малых деформациях связь между  $\gamma$  и  $\tau$  – линейная (закон Гука для деформации сдвига):

$$\tau = G \cdot \gamma, \quad (13.2)$$

коэффициент  $G$  называется *модулем сдвига*.

Размерности модулей  $E$  и  $G$  одинаковы.

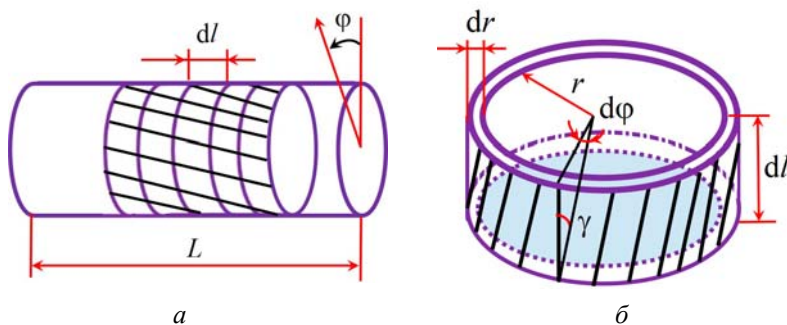


Рис. 13.2. Закручивание однородного круглого стержня.

**Деформации кручения.** Этот вид деформации рассмотрим на примере закручивания круглого однородного стержня, когда одно основание стержня повернуто относительно другого вокруг оси

стержня на некоторый угол  $\varphi$  (рис. 13.2 а). При малых деформациях угол кручения  $\varphi$  связан с моментом сил  $M$ , закручивающих стержень, законом Гука:

$$M = -f \cdot \varphi, \quad (13.3)$$

где  $f$  – модуль кручения. При этом каждый из малых объемов испытывает деформацию сдвига. Знак «минус» в уравнении (13.3) указывает на то, что вращающий момент стремится уменьшить угловое отклонение  $\varphi$ .

Если стержень однородный, то для любого выделенного элемента стержня длиной  $dl$  его основания повернуты друг относительно друга на один и тот же угол  $d\varphi$ :

$$d\varphi = \frac{dl}{L} \cdot \varphi, \quad (13.4)$$

где  $L$  – длина стержня. Если из диска толщиной  $dl$  выделить кольцо радиусом  $r$  и толщиной  $dr$ , то, как видно из рис. 13.2 б, угол кручения  $d\varphi$  и угол  $\gamma$ , характеризующий деформацию сдвига элементарного объема, связаны соотношением:

$$\gamma \cdot dl = d\varphi \cdot r. \quad (13.5)$$

Здесь учтено, что углы  $\gamma$  и  $d\varphi$  малы, поэтому  $\sin \gamma \approx \gamma$  и  $\sin(d\varphi) \approx d\varphi$ . Определим касательное усилие, действующее на элементарную поверхность кольца площадью  $dr \cdot rd\varphi$ , используя соотношения (13.3) и (13.5):

$$\tau(r \cdot dr \cdot d\varphi) = G \cdot \gamma \cdot (r \cdot dr \cdot d\varphi) = r^2 G \frac{d\varphi}{dl} dr \cdot d\varphi.$$

Вклад этого элементарного усилия в момент относительно оси стержня равен

$$dM = r^3 G \frac{d\varphi}{dl} \cdot dr \cdot d\varphi.$$

Интегрируя по  $r$  и  $\varphi$ , находим суммарный момент внутренних сил, действующих в произвольном сечении стержня:

$$M = G \frac{d\varphi}{dt} \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 dr d\varphi = \frac{\pi GR^4}{2} \frac{d\varphi}{dl}, \quad (13.6)$$

где  $R$  – радиус стержня.

Этот момент одинаков во всех поперечных сечениях стержня и равен моменту сил, закручивающих стержень. Подставляя  $d\varphi$  в виде (13.4) в (13.6), получаем:

$$M = \frac{G\pi R^4}{2} \frac{\varphi}{L}.$$

Учитывая (13.3), находим связь между модулем кручения  $f$  и модулем сдвига  $G$ :

$$f = \frac{\pi GR^4}{2L}. \quad (13.7)$$

Обычно деформации кручения исследуются на крутильном маятнике (рис. 13.3). Если один из концов стержня закрепить, а ко второму концу приложить момент сил  $M$  относительно продольной оси, то стержень закрутится. Угол поворота  $\varphi$  одного конца относительно другого может быть найден с учетом закона Гука (13.3) для деформации кручения.

В каждом малом объеме тела, подвергающегося деформации кручения, происходит деформация сдвига.

Для испытываемого тела цилиндрической формы (длинный тонкий стержень) связь между модулем кручения и модулем сдвига описывается формулой (13.7).

Метод определения модуля сдвига, используемый в данной работе, основан на зависимости периода крутильных колебаний маятника от упругих свойств стержня из исследуемого материала. Телом маятника служит горизонтальный цилиндр с надетыми на него грузами массы  $m$ . Изменяя расстояние от грузов до оси вращения, можно менять момент инерции, а следовательно, и период колебаний маятника. По зависимости периода колебаний маятника от его момента инерции определяется модуль кручения материала, а затем и модуль сдвига.

Уравнение вращательного движения маятника относительно неподвижной вертикальной оси (уравнение моментов) имеет вид:

$$J \cdot \varepsilon = M, \quad (13.8)$$

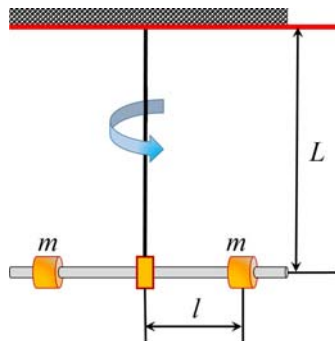


Рис. 13.3. Устройство маятника для исследования крутильных колебаний.

где  $J$  – момент инерции маятника,  $\varepsilon$  – угловое ускорение,  $M$  – момент внешних сил (в данном случае – сил упругости).

При малых углах отклонения маятника от положения равновесия можно считать, что этот угол и момент внешних сил связаны соотношением (13.3).

Подставляя (13.3) в (13.8), получим уравнение вращательного движения:

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -f\varphi. \quad (13.9)$$

Уравнение (13.9) приводится к каноническому виду уравнения гармонических колебаний:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0, \quad (13.10)$$

где  $\omega_0 = \sqrt{f/J}$  – круговая частота.

Учитывая связь между круговой частотой  $\omega_0$  и периодом колебаний  $T$ , получаем:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{f}}. \quad (13.11)$$

Модуль кручения  $f$  и модуль сдвига  $G$  можно определить с помощью (13.11), исключив неизвестный момент инерции  $J$ . Если на горизонтальную платформу поместить два одинаковых груза массой  $m$  каждый на одинаковом расстоянии  $l$  от оси вращения, то момент инерции платформы с грузом равен

$$J = J_0 + 2ml^2, \quad (13.12)$$

где  $J_0$  – момент инерции платформы без грузов.

Период колебаний платформы без грузов равен

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{f}}, \quad (13.13)$$

период колебаний платформы с двумя грузами массой  $m$ , находящимися на расстоянии  $l$ , равен

$$T_{2m} = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + 2ml^2}{f}}. \quad (13.14)$$

Из (13.13) и (13.14) следует, что модуль кручения может быть определен из значений  $T_0$  и  $T_{2m}$  по следующей формуле:

$$f = 4\pi^2 \frac{2ml^2}{T_{2m}^2 - T_0^2}. \quad (13.15)$$

Модуль сдвига может быть определен с помощью (13.7):

$$G = \frac{f \cdot 2L}{\pi R^4}. \quad (13.16)$$

### Экспериментальная установка

Общий вид экспериментальной установки показан на рис. 13.4. На основании 1 установлена вертикальная стойка 2, в верхней части которой находится горизонтально расположенная планка-держатель 3 для исследуемых стержней. Исследования проводятся со стержнями 4 различной длины и толщины. На верхнем конце стержня находится цилиндрическая насадка 5, которая крепится к планке 3 винтом 6. К нижнему концу стержня крепится металлический зажимной рычаг 7, который с помощью двух винтов крепится к платформе 8. На платформе могут закрепляться грузы 9. Колебания в системе возбуждают небольшим поворотом платформы 8 вокруг вертикальной оси

Система измерения времени включает в себя электронный таймер 10 с фотодатчиком 11, укрепленным на подставке. При проведении измерений датчик устанавливают таким образом, чтобы риска в окне 12 платформы 8 при колебаниях пересекала луч света фотодатчика 11. В комплект установки входят несколько стержней. При выполнении работы исследуются стальной, алюминиевый и медный стержни, имеющие одинаковые длину и сечения. В ходе работы потребуется несколько раз менять стержни, поэтому

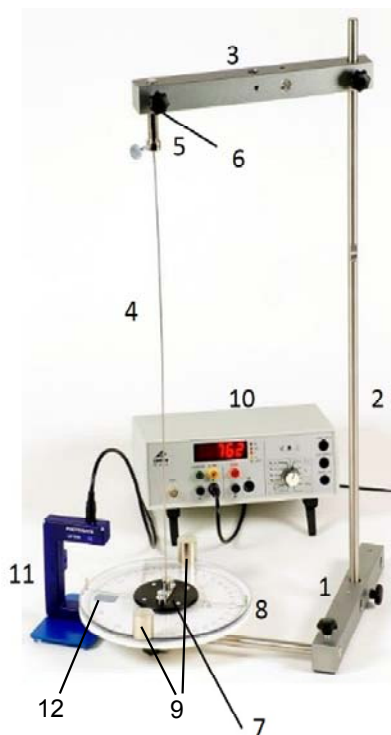


Рис. 13.4. Общий вид экспериментальной установки.



Рис. 13.5. Первый этап смены стержня: крепление цилиндрического стержня к диску винтами 1 с помощью зажимного рычага и зажимной втулки.



Рис. 13.6. Второй этап: крепление стержня винтами 1, 3 к зажимной втулке и регулировка рабочего расстояния (около 8 мм) между диском маятника и диском шкалы.

рассмотрим подробнее эту процедуру. Смена стержней проводится в два этапа (см. рис. 13.5 и 13.6).

Перед началом работы следует убедиться, что таймер включен (светится его индикатор). Переключатель режимов работы таймера (15, см. **Приложение 1**) должен быть установлен в положение  $T_{\Delta}$  с пиктограммой в виде маятника, соответствующее непрерывному измерению периода колебаний. Для перевода таймера в режим измерений нужно один раз в начале работы нажать кнопку 3 «Start», при этом загорится зеленый индикатор «Gate». В дальнейшем никаких манипуляций с таймером производить не нужно.

Проверьте, чтобы в положении равновесия риска в окне 12 диска маятника совпадала с серединой фотодатчика.

### Упражнение 1. Определение модуля кручения и модуля сдвига методом колебаний \*)

#### Измерения

1. Выбрать один из стальных стержней. Измерить и записать в табл. 13.1 его длину  $L$  и радиус  $R$ .

2. Установить стержень в устройство крепления (в соответствии с приведенными выше указаниями).

3. Отклонить штангу на небольшой угол (15-20 градусов) и отпустить. Измерить период колебаний  $T_0$  «пустой» платформы. Повторить эксперимент  $k = 3$  раза. Данные записать в табл. 13.1.

4. Взвесить грузы. Результаты записать в табл. 13.1. Установить грузы на краю платформы и измерить расстояние  $l$ .

5. Отклонить штангу на небольшой угол (15-20 градусов) и отпустить. Измерить период колебаний  $T_{2m}$  платформы с грузами  $m$ . Повторить эксперимент  $k = 3$  раза. Результаты записать в табл. 13.1.

Таблица 13.1

#### Экспериментальные данные упражнения 1

$k$	$T_0, \text{с}$	$\bar{T}_0, \text{с}$	$S_{\bar{T}_0}, \text{с}$	$T_{2m}, \text{с}$	$\bar{T}_{2m}, \text{с}$	$S_{\bar{T}_{2m}}, \text{с}$	$l, \text{см}$	$m, \text{г}$
Сталь, $L = \quad \text{см}$ , $R = \quad \text{см}$								
1								
2								
3								
Медь, $L = \quad \text{см}$ , $R = \quad \text{см}$								
1								
2								
3								
Дюралюминий, $L = \quad \text{см}$ , $R = \quad \text{см}$								
1								
2								

\*) Упр. 1 и Упр. 2 выполняются последовательно для каждого стержня, т.е. менять стержни нужно лишь после того, как измерения для двух упражнений будут сделаны.



3							
---	--	--	--	--	--	--	--

### Упражнение 2. Определение модуля кручения и модуля сдвига статическим методом

#### Измерения



Рис. 13.7. Измерения модуля кручения статическим методом.

1. Зацепите крючок штанги динамометра за штырек на краю платформы (см. рис. 13.7).

2. Потянув динамометр, поверните платформу на небольшой угол (18 градусов). Динамометр должен быть направлен строго по касательной к платформе. Проведите  $k=3$  измерения. Запишите значения угла и показания динамометра в табл. 13.2.

3. Уменьшая каждый раз угол отклонения на 2-3 градуса, измерьте силу, действующую на динамометр для различных углов в

диапазоне 3 -15 градусов. Для каждого угла отклонения платформы измерение проведите  $k=3$  раз. Запишите показания угловой шкалы и динамометра в табл. 13.2.

Таблица 13.2

#### Экспериментальные данные упражнения 2

$\varphi$	$k$	$F$	$\bar{F}$	$S_{\bar{F}}$	$\bar{M}$	$S_{\bar{M}}$
		Н	Н	Н	Н·м	Н·м
Сталь						
3	1					
	2					
	3					
5	1					
	2					
	3					
...						
18	1					
	2					

$\varphi$	$k$	$F$	$\bar{F}$	$S_{\bar{F}}$	$\bar{M}$	$S_{\bar{M}}$
		Н	Н	Н	Н·м	Н·м
	3					
<b>Медь</b>						
3	1					
	2					
	3					
...						
18	1					
	2					
	3					
<b>Дюралюминий</b>						
3	1					
	2					
	3					

Проведите все выше рассмотренные измерения *упр. 1 и 2* для стержней из меди и дюралюминия. Результаты *упр. 1* (пп. 1-5) запишите в табл. 13.1, а *упр. 2* (пп. 6-8) – в табл. 13.2.

### Обработка результатов

#### Упражнение 1

1. Вычислить средние арифметические значения периода колебаний «пустой» и нагруженной платформы по формуле:

$$\bar{T} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T_k.$$

2. Вычислить случайную погрешность  $S_{\bar{T}}$  среднего арифметического по формуле:

$$S_{\bar{T}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (T_k - \bar{T})^2}.$$

3. Рассчитать суммарную погрешность по формуле:

$$\sigma_T = \sqrt{S_{\bar{T}}^2 + \sigma_{\Pi}^2},$$

где  $\sigma_{\text{п}}$  – приборная погрешность таймера. При отсутствии заводского описания погрешность цифровых приборов можно приближенно оценить в 2–3 единицы младшего разряда индикатора.

Результаты расчетов в пп. 1–3 записать в табл. 13.3.

4. По формулам (13.16) и (13.17) найти модуль кручения и модуль сдвига для исследованных материалов. Результаты запишите в табл. 13.3.

Таблица 13.3

**Вычисленные значения  $\bar{T}_0^2$ ,  $\bar{T}_{2m}^2$ ,  $f$ ,  $G$  и их погрешности**

Материал	$\bar{T}_0^2, \text{м}^2$	$S_{\bar{T}_0^2}, \text{м}^2$	$\bar{T}_{2m}^2, \text{с}$	$S_{\bar{T}_{2m}^2}, \text{с}$	$f, S_f,$ Н·м/рад	$G, S_G,$ ГПа
Сталь						
Медь						
Алюминий						

5. Рассчитать погрешности величин  $f$  и  $G$  по формулам для косвенных измерений. Результаты запишите в табл. 13.3.

*Упражнение 2*

1. Найти среднее арифметическое значение приложенной к подвесу силы по формуле:

$$\bar{F} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F_k.$$

2. Вычислить случайную погрешность  $S_{\bar{F}}$  среднего арифметического по формуле:

$$S_{\bar{F}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^n (F_k - \bar{F})^2}.$$

3. Рассчитать суммарную погрешность по формуле:

$$\sigma_F = \sqrt{S_{\bar{F}}^2 + \sigma_{\text{д}}^2},$$

где  $\sigma_{\text{д}}$  – приборная погрешность динамометра (равна половине деления его шкалы). Результаты пп. 1, 2 записать в табл. 13.2.

4. Найти момент внешних сил по формуле  $M = FR_0$ , где  $R_0$  – расстояние от центра подвеса до точки крепления динамометра. Результаты записать в табл. 13.2.

5. Постройте график зависимости  $M(\varphi)$  и в рамках линейной аппроксимации, используя метод наименьших квадратов (МНК) найдите модуль кручения. По формуле (13.16) найти модуль сдвига для исследованных материалов. Результаты запишите в табл. 13.4.

6. Проведите расчет погрешностей для  $f$  и  $G$ , используя формулы для косвенных измерений. Результаты запишите в табл. 13.4.

Таблица 13.4

### Вычисленные значения $f$ , $G$ и их погрешности

Материал	$f, S_f, \text{Н} \cdot \text{м/рад}$	$G, S_G, \text{ГПа}$
Сталь		
Медь		
Алюминий		

### Основные итоги работы

*В процессе выполнения работы двумя разными методами должны быть определены значения модулей кручения и сдвига для образцов из стали, алюминия и меди. Кроме того, должен быть проведен сравнительный анализ полученных значений.*

### Контрольные вопросы

1. Какие виды деформаций вы знаете?
2. Как связаны модуль кручения и модуль сдвига?
3. Как зависят модуль кручения и модуль сдвига от длины и толщины проволоки?
4. Какое уравнение описывает вращательное движение маятника?
5. Каким образом можно найти модуль кручения, если неизвестен момент инерции маятника?
6. Какую размерность имеют модуль кручения и модуль сдвига?
7. В задаче грузы рассматриваются как точечные. Как изменятся формулы расчета модуля кручения и модуля сдвига, если учесть собственные моменты инерции грузов?

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### Приложение 1. ЦИФРОВОЙ СЧЕТЧИК/ТАЙМЕР

#### Описание прибора

Цифровой счетчик/таймер предназначен для измерения продолжительности движения, длительности переходных процессов, периодов, частот и периодов маятников, а также для подсчета числа событий или импульсов трубки Гейгера. Прибор имеет громкоговоритель, который можно включить и выключить, источник питания для подключения напрямую к рамкам с фотоэлементами или для питания счетчика Гейгера-Мюллера. Для подсчета событий можно запрограммировать фиксированный период подсчета в диапазоне от 1 с до 99999 с. Подсчет событий (пуск, остановка) можно запускать либо сигналом, подаваемым на входные гнезда, либо вручную с помощью переключателей. В комплект поставки входит подключае-

#### Органы управления прибором

мый источник питания.

Органы управления представлены на рис. П1.



Рис. П1. Электронный многофункциональный таймер: 1 – кнопка «Reset», 2 – кнопка «Стоп», 3 – кнопка «Старт», 4 – выключатель акустического сигнала счетчика, 5 – светодиодный дисплей «режим работы и диапазоны измерения», 6 – дисплей, 7 – гнездо «В Stop», 8 – гнездо «Старт», 9 – гнездо «Start / Count», 10 – BNC разъем для счетчика Гейгера-Мюллера, 11 – клемма заземления, 12 – вход для светового барьера (канал А), 13 – клемма заземления, 14 – вход для светового барьера (канал В), 15 – переключатель для выбора работы и времени измерения.

## Технические характеристики

- Измерение времени: 0,1 мс – 99999 с;
- Разрешение: 0,1 мс / 1 мс / 0,1 с;
- Измерение частоты: 1–100 кГц;
- Разрешение: 1 мГц (1–100 Гц), 1 Гц (1–100 кГц);
- Периоды подсчета: 1/10/60/100 с или запуск подсчета вручную;
- Вход А: разъем мини-DIN на 8 гнезд;
- Вход В: разъем мини-DIN на 8 гнезд;
- Входное напряжение А: 0,5 В–15 В переменного тока;
- Входное напряжение В: 1 В–15 В переменного тока;
- Активный фронт нарастающий/спадающий;
- Вход счетной трубки: байонетное гнездо;
- Дисплей: 5-разрядный светодиодный индикатор;
- Рабочее напряжение: 12 В переменного тока от подключаемого сетевого адаптера питания.

## Измерения

**Примечание:** *Прибор не имеет отдельного переключателя включения/выключения. Он включается при подключении его сетевого адаптера питания в розетку 220 В. Если обнаружатся ошибки в работе, отключите прибор от сети на несколько секунд.*

### Измерение времени

Измерение может запускаться сигналами, подаваемыми на гнезда 9 и 7, или нажатием кнопки вручную.

- Установите переключатель (15) в положение  $\Delta t_{AB}$  (мс или с).

#### **Ручной запуск**

- Нажмите кнопку «Пуск» (3), и таймер начинает отсчет времени.
- Нажмите кнопку (2) «Стоп», и таймер остановит отсчет.
- Нажмите кнопку «Reset» (1), чтобы установить таймер на ноль.

#### **С помощью сигнала со светового барьера**

- Подключите один световой барьер к гнезду А (12).
- Подключите второй барьер к гнезду В (14).

Когда световой барьер пересекается телом, начинается отсчет времени. Измерение останавливается при срабатывании барьера В.

### ***С помощью сигнала (например с устройства для исследования свободного падения)***

- Подключите устройство свободного падения через гнезда (9), (7) и (11).


Таймер начинает отсчет, когда стальной шарик освобождается устройством в верхней части и автоматически останавливается, когда шарик попадает на контактную пластину в нижней части установки.

### ***Время затемнения светового барьера***

- Соедините гнезда «Старт» (8) и «В Stop» (7) вместе.
- Подключите световой барьер для Socket A (12).

Измеренное время равно времени прохождения тела через световой луч. Его вступление в пучок затемняет световой барьер и запускает таймер. Когда тело выходит из луча, барьер снова регистрирует свет, и таймер останавливается.

### ***Период маятника***

- Установите переключатель (15) на символ  $T_A$  .
- Подайте входной сигнал на клемму (9) или подключите световой барьер к гнезду А (12).
- Нажмите кнопку «Пуск» (3).

Измеренное время есть время (в миллисекундах) между последовательными сигналами низкого и высокого уровня (L/H), зарегистрированными на гнезде (9), или три прерывания светового пучка, обнаруженного на гнезде А (12).

### ***Подсчет периодов***

#### ***Фиксированные периоды:***

- Установите переключатель (15) в одно из положений ( $N_A$  1/10/60 с).
- Подайте входной сигнал на гнездо (9), или подключите фотоэлементы к гнезду А (12).
- Начало отсчета обеспечивается нажатием на кнопку «Start» (3).

Измерение осуществляется: между последовательными сигналами низкого и высокого уровня L/H на гнезде (9), между импуль-

сами из трубки Гейгера, подключенной к гнезду (10), или прерываниями светового барьера, подключенной к гнезду А (12).

#### Программируемые временные периоды:

- Установите переключатель (15) на символ  $N_A$ .
- Нажмите кнопку «Пуск» (3), чтобы установить десятки, сотни, тысячи или десятки тысяч секунд (увеличивается на единицу при нажатии на кнопку).

- «Стоп» (2) имеет такой же эффект, но вызывает уменьшение шкалы времени.

- Зафиксируйте период, нажав кнопку «Reset» (1). На дисплее на короткое время будет мигать значение периода, а затем сбрасываться в «0».

- При нажатии кнопки «Пуск» (3) активируется вход счетчика и загорается светодиод «GATE» (5), указывая на готовность прибора к измерениям.

#### Измерение частоты :

- Установите переключатель (15)  $f_A$  (Гц или кГц).
- Подайте входной сигнал на гнездо (9).
- Запустите измерение, нажав «Пуск» (3).
- Светодиод «GATE» (5) загорается, указывая на готовность прибора к измерениям.