МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М. В. Ломоносова

Физический факультет

кафедра общей физики и физики конденсированного состояния

Методическая разработка

по общему физическому практикуму

ВВЕДЕНИЕ К ЛАБ. РАБОТАМ НА ИЗУЧЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ

Доцент Пустовалов Г. Е.

Москва - 2012

Подготовил методическое пособие к изданию доц. Авксентьев Ю.И.

1. ПОНЯТИЕ О КОЛЕБАНИЯХ

К о л е б а н и я м и называются процессы, при которых какая-либо физическая величина принимает многократно, через равные (или почти равные) последовательные промежутки времени, одни и те же (или приблизительно одни и те же) значения. Природа этой физической величины может быть самой различной. Например, это может быть отклонение шарика, подвешенного на нити, от положения равновесия, или угол, который составляет эта нить с вертикалью, или сила тока в электрическом контуре, или температура воздуха, повышающаяся в середине дня и понижающаяся ночью, или давление крови в сосудах при сокращениях сердца и т.д.

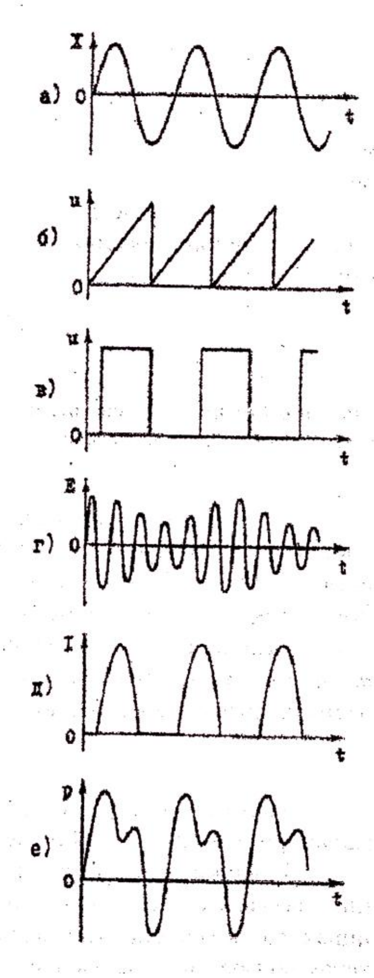


Рис. 1

Несмотря на различную природу, колебания самых разнообразных физических величин имеют много общего. Все они характеризуются *п е р и о д о м* — промежутком времени, через который значения колеблющейся величины начинают повторяться, *а м п л и т у д о й* — наибольшим отклонением от нулевого значения. Часто при колебаниях изменение с течением времени различных по природе физических величин носит одинаковый характер, т.е. эти величины изменяются по одному закону с течением времени. В этом случае колебания описываются одинаковыми математическими формулами. На рис. 1 показаны графики зависимости от времени t некоторых из бесчисленно возможных периодических процессов для разных физических величин: а) отклонения X от положения равновесия груза, подвешенного на пружине, б) напряжения u, создаваемого генератором развертки электронного осциллографа, в) напряжения u, создаваемого генератором тактовой частоты компьютера, г) напряженности E электрического поля, модулированного звуковой частотой, в радиоволне, д) силы I выпрямленного переменного тока, е) звукового давления p при произнесении звука "ууу...".

Общие для всех колебаний закономерности можно изучать на примере какой-либо одной физической величины. Здесь мы будем рассматривать механические колебания. *Механическими колебаниями* называются такие колебания, для которых изменяющейся физической величиной является *отклонение* материальной точки (или системы материальных точек) от положения равновесия.

2. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КЛЕБАНИЯ

Гармоническими колебаниями называются колебания, при которых изменение физической величины X с течением времени (закон колебаний) выражается формулой:

$$X = A\sin(\omega t + \varphi) \tag{1}$$

Здесь X является функцией времени, т.е. $X = X(t)$. Множитель A показывает наибольшее значение, которое может принимать колеблющаяся величина X и называется *амплитудой* колебаний. Амплитуда имеет размерность величины X.

Величина ω называется *круговой* (или угловой) *частотой*. Круговая частота ω связана с периодом колебаний T и с обычной частотой ν (числом колебаний в единицу времени) соотношениями:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \tag{2}$$

Частота ν измеряется в герцах [1 Гц = 1 колебанию в секунду, 1 кГц (килогерц) = 1000 Гц, 1 МГц (мегагерц) = 1 млн. Гц].

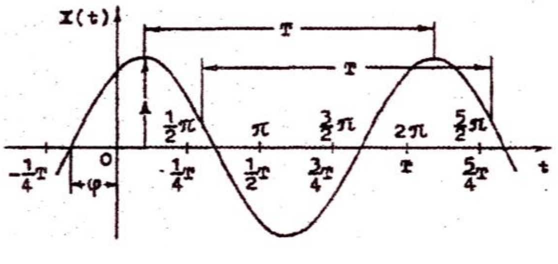


Рис. 2

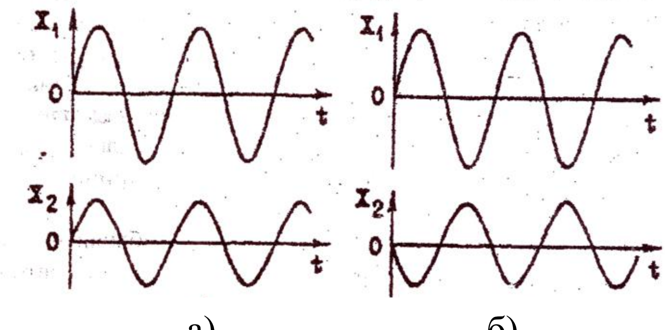
Величина $\omega t + \varphi$, стоящая под знаком тригонометрической функции, называется *фазой* колебаний. Фаза измеряется в угловых единицах, т.е. в градусах или радианах (долях π). С помощью фазы можно характеризовать отклонение колеблющейся величины от нулевого значения в заданный момент времени t. В частности, если значение t таково, что фаза кратна целому числу π, т.е. $\omega t + \varphi = n\pi$ (n — целое число), то $X = 0$; если $\omega t + \varphi = (2n+1)\pi/2$, то $X = \pm A$ (т.е. максимально); если $\omega t + \varphi = (2n+1)\pi/4$, то $X = \pm A/\sqrt{2}$ и т.д.

Величина φ называется *начальной фазой*. Выражение $A\sin\varphi$ показывает значение величины X в начальный момент времени $t=0$. В частности, если $\varphi=0$, то $X=A\sin\omega t$ (в начальный момент времени при $t=0$ $X=0$). Если $\varphi=\pi/2$, то $X=A\cos\omega t$ (в начальный момент времени X имеет максимальное значение, т.е. равно A).

При изображении гармонических колебаний на графике по оси абсцисс откладывают время (в секундах или долях периода) или фазу (в угловых единицах). По сои ординат откладываю значения колеблющейся величины. При этом получается кривая, имеющая вид синусоиды, сдвинутой влево по оси абсцисс на величину, равную начальной фазе. На рис. 2 над осью абсцисс нанесен масштаб в угловых единицах (долях π), а под осью абсцисс — в единицах времени (долях периода) Если при изучении колебаний нас интересует не значение колеблющейся величины в данный момент времени, а признаки, характеризующие повторяемость движения: частота, период, характер изменения в течение периода и т.д., — то начальный момент времени может быть выбран произвольно. В этом случае при изучении отдельной колеблющейся величины начальная фаза не играет никакой роли (ее можно положить равной нулю или $\pi/2$ для простоты формул). В частности, гармонические колебания можно записывать также в виде

$$X = A\cos(\omega t+\varphi) \tag{3}$$

Эта формула равносильна формуле (1). Она получается заменой в формуле (1) φ на $\varphi+\pi/2$ (это значит, что начальный момент времени выбран $1/4$ периода позже).



а) б)

Рис. 3

Однако начальная фаза существенна, если есть две (или более) величины, колеблющиеся по гармоническому закону с одинаковой частотой (периодом), и необходимо знать, на какую долю периода позже (или раньше) одна из величин достигает максимального значения (или проходит нулевое значение), чем другая. Это может быть охарактеризовано *разностью (сдвигом) фаз* этих величин. В любой момент времени эта разность фаз остается постоянной и равной разности начальных фаз. Всегда можно выбрать начальный момент времени так, чтобы начальная фаза одной из колеблющихся величин была равна нулю. Тогда разности фаз этой и всех остальных величин будут равны их начальным фазам.

Про величины, колеблющиеся с одинаковой частотой, одновременно достигающие наибольших значений, одновременно проходящие нулевые значения и изменяющиеся в любой момент времени в одну и ту же сторону, говорят, что они колеблются в *одинаковых фазах* (рис. 3,а). Если же величины одновременно достигают максимальных значений, одновременно проходят нулевые значения, но изменяются в любой момент времени в противоположные стороны, то про них говорят, что они колеблются в *противоположных фазах* (или в противофазах) (рис. 3,б). Фазы величин, колеблющихся в одинаковых фазах, могут быть и неравными друг другу, но отличаться между собой на величину, кратную 2π (т.е. на $2\pi n$). Фазы величин, колеблющихся в противофазах, могут отличаться между собой на величину, кратную нечетному числу π [на $(2n+1)\pi$].

Часто для сравнения фаз двух или большего числа величин, колеблющихся по гармоническому закону с одинаковой частотой, их изображают на одном графике. Эти величины могут иметь разную физическую природу. Для каждой из этих величин на оси ординат должен быть нанесен свой масштаб.

3. СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ

Скорость любого прямолинейного движения определяется как производная перемещения L по времени:

$$V = \frac{dL}{dt} \tag{4}$$

(часто первую производную по времени обозначают точкой над буквой: $V = dL/dt = \dot{L}$). Если колеблющейся величиной является отклонение материальной точки от положения равновесия, то это отклонение X и будет перемещением точки, которое она совершит к моменту времени t. В случае гармонических колебаний, когда $X = A\sin(\omega t + \varphi)$, скорость будет:

$$V = \frac{dX}{dt} = \frac{d}{dt}[A\sin(\omega t + \varphi)] = \omega A\cos(\omega t + \varphi)\,, \tag{5}$$

или

$$V = \omega A\sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

Мы видим, что скорость V при гармонических колебаниях также изменяется с течением времени по гармоническом закону, только, как говорят, опережает по фазе отклонение X на $\pi/2$, т.е. в тот момент, когда отклонение наибольшее, скорость равна нулю, а когда точка проходит положение равновесия, скорость достигает максимального значения.

Ускорение для прямолинейного движения определяется как производная скорости по времени (или вторая производная перемещения по времени). В случае гармонических колебаний

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}[\omega Acos(\omega t + \varphi)] = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi) \qquad (6)$$

Отсюда следует, что ускорение при гармонических колебаниях тоже изменяется по гармоническому закону, но при этом колеблется в противоположной фазе с отклонением, т.е. всегда имеет противоположный знак.

Изучение гармонических колебаний важно по ряду причин.

1. В природе и технике часто возникают колебания, которые в течение длительных промежутков времени мало отличаются от гармонических (строго гармонических колебаний не существует).

2. Большинство физических законов содержит физические величины в виде функций и их производных. Поэтому, используя гармонические функции, мы все время остаемся в кругу гармонических величин (если формулы линейны относительно гармонических функций и их производных).

3. Периодический процесс любой зависимости от времени может быть представлен в виде суммы, слагаемые которой являются гармоническими функциями с частотами, кратными частоте этого процесса, т.е. в виде так называемого ряда Фурье. Амплитуды слагаемых вычисляются достаточно просто.

4. СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ, ПРОИСХОДЯЩИХ ПО ОДНОМУ НАПРАВЛЕНИЮ

Если точка участвует одновременно в двух гармонических колебательных движениях с *одинаковой частотой* и с любыми начальными фазами и амплитудами, то ее результирующее движение снова представляет собой *гармонические* колебания, происходящие с той же частотой. Начальная фаза и амплитуда результирующего колебания выражаются при этом через начальные фазы и амплитуды складываемых колебаний.

Колебания, получающиеся в результате сложения двух гармонических колебаний с *разными частотами*, не являются

гармоническими. Рассмотрим здесь наиболее простой случай, который нам понадобится в дальнейшем, когда складываются два гармонических колебания с разными частотами, но с одинаковыми амплитудами и равными нулю начальными фазами:
Их сумма

$$X_1 = A\sin\omega_1 t, \qquad X_2 = A\sin\omega_2 t. \tag{7}$$

Их сумма

$$X = X_1 + X_2 = A\sin\omega_1 t + A\sin\omega_2 t = \\ = 2A\cos\left[\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t\right]\sin\left[\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t\right] \tag{8}$$

представляет собой произведение двух периодических функций

$$\cos\left[\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t\right] = \cos\Omega_1 t \quad \text{и} \quad \sin\left[\frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)t\right] = \sin\Omega_2 t$$

с круговыми частотами

$$\Omega_1 = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) \quad \text{и} \quad \Omega_2 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2).$$

Если частоты ω_1 и ω_2 мало отличаются друг от друга, то Ω_1 является малой величиной, а период изменения косинуса $T_1 = 2\pi/\Omega_1$ будет величиной большой по сравнению с периодом колебания синуса $T_2 = 2\pi/\Omega_2$. За время одного колебания косинуса успеет произойти много колебаний синуса. В этом случае множитель $2A\cos\left[\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t\right]$

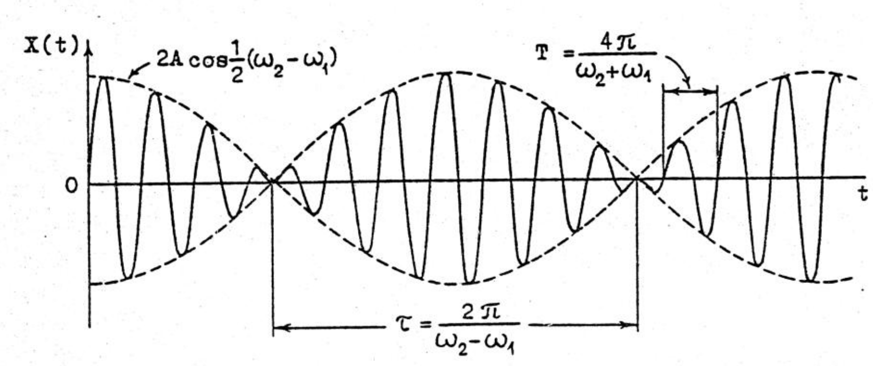


Рис.4

можно принять за амплитуду, а величину Ω_2 за частоту колебаний, т.е.

$$X = X_1 + X_2 = A_1 \sin \Omega_2 t \tag{9}$$

При этом амплитуда медленно изменяется с течением времени и обращается в нуль, когда величина $\Omega_1 t = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t$ кратна π, т.е. через промежутки времени $\tau = 2\pi/(\omega_2 - \omega_1)$. Такие колебания носят название *биений* (рис. 4). Величина

$$N = \frac{1}{\tau} = \nu_2 - \nu_1 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} \tag{10}$$

называется *частотой биений.*

5. УПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ

Вообще колебания могут происходить в какой-либо системе, если при отклонении ее от положения равновесия возникают силы, стремящиеся вернуть систему в прежнее положение. Колебания, которые происходят под действием возвращающей силы, возникающей вследствие упругой деформации какого-либо тела, называются *упругими колебаниями.*

Если груз, подвешенный на пружине, оттянуть вниз на некоторое расстояние, а затем отпустить, то он придет в колебательное движение. Возвращение груза в положение равновесия происходит под действием деформированной пружины, т.е. под действием упругой силы. По закону Гука, эта сила, действующая на груз, пропорциональна растяжению (или сжатию) пружины (конечно, если деформации не слишком велики), а, следовательно, пропорциональна расстоянию груза от положения равновесия в данный момент:

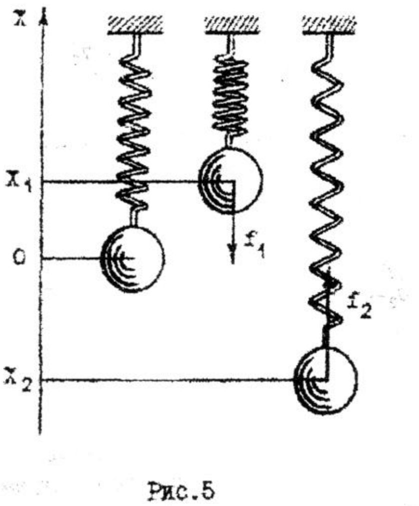


Рис.5

$$f = -kX \tag{11}$$

Здесь X — расстояние от положения равновесия (величина отклонения груза) (рис. 5), f — величина силы, действующей на груз со стороны пружины в данный момент времени t. Знак минус поставлен, чтобы показать, что сила на груз действует всегда в направлении, противоположном отклонению. k — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом жесткости пружины, имеющий размерность $Н/м$ и показывающий, какая сила требуется для растяжения данной пружины на единицу длины.

Согласно второму закону Ньютона, движение под действием силы происходит ускоренно. Ускорение в любой момент времени определяется выражением

$$ma = f\,, \tag{12}$$

где m — масса груза, a — ускорение. Подставляя в закон Ньютона выражение для упругой силы (11) (мы не принимаем во внимание силу тяжести, действующую на груз, так как она уравновешивается начальным растяжением пружины) и заменяя ускорение второй производной перемещения по времени, получим

$$m\frac{d^2X}{dt^2} = -kX\,,$$

или

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -\frac{k}{m}X\,. \tag{13}$$

Применяя сокращенные обозначения, напишем это выражение в виде:

$$\ddot{X} + \frac{k}{m}X = 0\,.$$

Закон Ньютона, таким образом, выражен в виде уравнения, в которое входит неизвестная функция времени $X(t)$ и ее вторая производная. Это уравнение называется у р а в н е н и е м *д в и ж е н и я*. Так как мы знаем, что закон Ньютона в механике должен выполняться *в с е г д а*, то в любой момент времени левая часть уравнения (13) должна быть равна правой. Следовательно, чтобы найти закон колебаний груза (зависимость от времени величины его отклонения от положения равновесия), надо найти такую функцию времени X, для которой вторая производная по времени d^2X/dt^2 отличается от самой функции постоянным, не зависящим от времени множителем k/m и знаком, т.е. найти такой закон движения, при котором ускорение в любой момент времени пропорционально отклонению по величине и противоположно по знаку. Такой функцией является функция, описывающая гармонические колебания. В самом деле, если подставить в левую часть уравнения (13) выражение для ускорения при гармонических колебаниях

$$\frac{d^2X}{dt^2} = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi),$$

а в правую часть $X = A\sin(\omega t + \varphi)$, то легко найти, что левая часть будет в любой момент времени равна правой при условии, что

$$\omega^2 = \frac{k}{m}. \qquad (14)$$

Отсюда мы делаем вывод, что упругие колебания являются *гармоническими* колебаниями, причем их круговая частота

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (15)$$

зависит *только* от механических свойств (параметров) колеблющейся системы: массы груза и упругости (жесткости) пружины, но не зависит от амплитуды и времени. Амплитуда и начальная фаза колебаний зависят от положения груза в начальный момент времени и начального толчка, который получил груз (его начальной скорости). Амплитуда не зависит от времени, если, конечно, не учитывать трения (см. ниже §8).

Колебания, которые происходят в системе, выведенной каким-либо способом из положения равновесия и предоставленной затем самой себе, называются *собственными* или *свободными колебаниями* системы, а частота собственных колебаний — *собственной* ***частотой***.

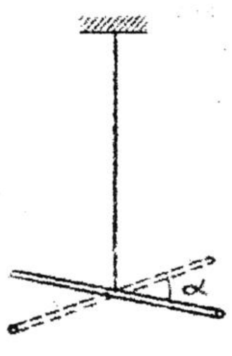


Рис.6

Гармонические колебания могут происходить не только под действием упругой силы, но также под действием силы любого происхождения, лишь бы она была пропорциональна отклонению системы от положения равновесия. Такие силы называются *квазиупругими силами*.

Если уравнение движения (второй закон Ньютона) можно привести к такому виду, что слева стоит вторая производная какой-то функции по времени, а справа — сама функция с постоянным множителем и с обратным знаком, то движение обязательно будет представлять собой гармонические колебания, для нахождения собственной частоты которых надо извлечь квадратный корень из этого множителя.

6. КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Если на упругой нити или проволоке подвесить за середину стержень, чтобы он занял горизонтальное положение, а затем закрутить нить, повернув стержень в горизонтальной плоскости на какой-либо угол (рис. 6), и отпустить, то стержень начнет колебаться, поворачиваясь вокруг вертикальной оси. Такие колебания называются *крутильными колебаниями*. Величиной, характеризующей положение стержня в какой-то момент времени является угол, который он составляет в этот момент времени с его направлением в положении равновесия. Этот угол α, изменяющийся с течением времени, и будет в этом случае колеблющейся величиной.

Согласно закону Гука, на стержень со стороны закрученной нити будет действовать момент силы M, пропорциональный углу поворота стержня в данный момент времени:

$$M = -D\alpha . \tag{16}$$

Здесь D — коэффициент пропорциональности, называемый модулем кручения и показывающий, какой момент силы нужен для закручивания данной нити на единицу угла (на один радиан). Знак минус показывает, что момент силы направлен в сторону, противоположную отклонению.

Напишем второй закон Ньютона для вращательного движения твердого тела (уравнение моментов):

$$J\beta = M . \tag{17}$$

Здесь J — момент инерции стержня, $\beta = d^2\alpha/dt^2$ — угловое ускорение. Заменив в выражении (17) момент силы по формуле (16), а угловое ускорение β второй производной угла по времени, получим:

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -D\alpha \quad \text{или} \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{D}{J}\alpha . \tag{18}$$

Это равенство и является в данном случае уравнением движения. В него входит неизвестная функция времени $\alpha = \alpha(t)$. Здесь так же, как и в уравнении (13), в левой части стоит вторая производная функции α по времени, а в правой — сама функция с постоянным множителем D/J и обратным знаком. Закон Ньютона и в этом случае будет выполняться в любой момент времени, если α будет изменяться с течением времени по гармоническому закону:

$$\alpha = A\sin\left(\omega t+\varphi\right), \tag{19}$$

а круговая частота колебаний будет равна

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{J}}\,. \tag{20}$$

Конечно, все это верно не только для стержня, но и для любого тела, подвешенного на нити с модулем кручения D, если его момент инерции относительно оси, проходящей через нить, равен J.

Крутильные колебания, так же, как и колебания груза, подвешенного на пружине, являются упругими колебаниями.

7. ФИЗИЧЕСКИЙ И МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МАЯТНИКИ

Физическим маятником называется любое твердое тело, которое может вращаться вокруг горизонтальной оси O и центр тяжести которого не лежит на этой оси. Такое тело находится в положении равновесия, когда центр тяжести C ниже оси вращения на вертикальной линии OX, проходящей через ось.

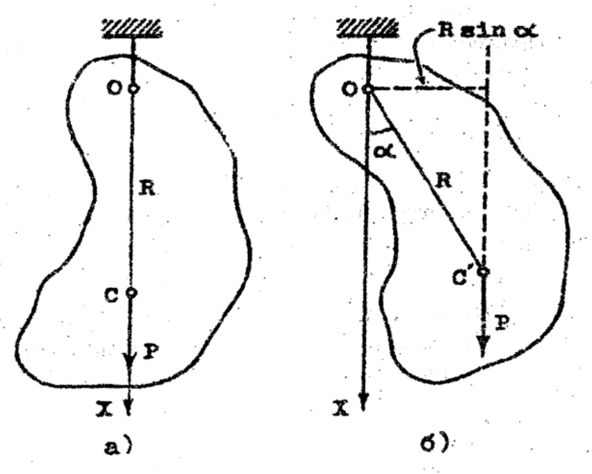


Рис.7, а и б

Обозначим расстояние между осью вращения O и центром тяжести C буквой R (рис. 7). Если вывести тело из положения равновесия так, что центр тяжести будет находиться в точке C' и линия OC' составляет с вертикалью угол α, то на тело будет действовать момент силы тяжести M, равный произведению веса тела $P = mg$ на плечо, т.е. на расстояние $R\sin\alpha$ между осью O и направлением силы тяжести (рис. 7,б).

$$M = PR\sin\alpha\,. \tag{21}$$

Этот момент сил будет стремиться возвратить тело в положение равновесия. Если отклоненное от положения равновесия тело отпустить, то оно начнет совершать колебания. Положение тела в любой момент времени можно характеризовать углом α, который и является здесь колеблющейся величиной.

Колебания физического маятника являются упругими, так как момент силы, возвращающий маятник в положение равновесия, обусловлен не упругими силами, а силой тяжести. Вообще говоря, момент силы тяжести пропорционален не углу отклонения α, а синусу этого угла. Однако при малых отклонениях $\sin\alpha \approx \alpha$. В этом случае можно считать, что

$$M = -PR\alpha, \qquad (22)$$

т.е. момент силы пропорционален углу отклонения (коэффициентом пропорциональности здесь будет произведение PR), и, следовательно, при малых углах отклонения колебания можно считать *к в а з и у п р у г и м и*. Знак минус показывает, что момент силы стремится повернуть тело в направлении, противоположном отклонению.

Напишем второй закон Ньютона для вращательного движения твердого тела (уравнении моментов):

$$J\beta = M\ . \qquad (23)$$

Здесь J — момент инерции тела относительно оси вращения, $\beta = d^2\alpha/dt^2$ — угловое ускорение. Заменив в выражении (23) момент силы по формуле (22), а угловое ускорение — второй производной угла по времени, получим:

$$J\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -PR\alpha \quad \text{или} \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{PR}{J}\alpha\ . \qquad (24)$$

В данном случае это равенство является уравнением движения. В него входит неизвестная функция времени $\alpha = \alpha(t)$. Здесь так же, как в уравнении (13), слева стоит вторая производная функции по времени, а справа — сама функция α с постоянным множителем PR/J и обратным знаком. Закон Ньютона в этом случае будет выполняться в любой момент времени, если α будет с течением времени изменяться по гармоническому закону:

$$\alpha = \alpha_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

а круговая частота будет

$$\omega = \sqrt{\frac{PR}{J}} = \sqrt{\frac{mgR}{J}} \, . \qquad (25)$$

В тех случаях, когда можно считать, что вся масса тела сосредоточена в одной точке (центре тяжести), то маятник называется *математическим*. Математическим маятником можно считать шарик, подвешенный на длинной нерастяжимой нити, если длина нити значительно больше диаметра шарика. В этом случае расстояние от оси вращения до центра тяжести (центра шарика) R можно считать равным длине нити l. Момент инерции шарика J — это момент материальной точки, находящейся на расстоянии l от оси вращения. Относительно этой оси он равен

$$J = ml^2 \, . \qquad (26)$$

Здесь m — масса шарика (массой нити пренебрегаем).

Для частоты колебаний математического маятника с помощью формул (25) и (26) легко получить выражение:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \, . \qquad (27)$$

Отсюда период колебаний математического маятника

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \, . \qquad (28)$$

Если имеется физический маятник с периодом колебаний

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgR}} \, , \qquad (29)$$

то всегда можно подобрать математический маятник такой длины L, у которого период колебаний также будет T_0. Длина такого математического маятника L называется *приведенной* длиной данного физического маятника. Так как, согласно формуле (28), для этого математического маятника

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad (30)$$

то, приравнивая формулы (29) и (30), найдем для приведенной длины следующее выражение

$$L = \frac{J}{mR}. \qquad (31)$$

Ясно, что все физические маятники, имеющие одинаковую приведенную длину, имеют и одинаковый период колебаний.

По теореме Штейнера-Гюйгенса момент инерции J относительно данной оси связан с моментом инерции J_0 относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр тяжести, формулой:

$$J = J_0 + mR^2, \qquad (32)$$

где m — масса тела, R — кратчайшее расстояние между этими осями. С помощью формулы (32) выражение для приведенной длины (31) можно представить в виде:

$$L = \frac{J_0}{mR} + R. \qquad (33)$$

Откуда видно, во-первых, что L больше R и, во-вторых, что

$$L - R = \frac{J_0}{mR}. \qquad (34)$$

Точка, лежащая на прямой, проходящей через центр тяжести и точку подвеса физического маятника, на расстоянии L от точки подвеса по другую сторону центра тяжести, называется *ц е н т р о м   к а ч а н и я*. Если физический маятник подвесить в центре качания, то расстояние от центра тяжести до новой точки подвеса будет $L - R$, и новую приведенную длину можно найти по формулам (33) и (34)

$$L' = \frac{J_0}{m(L-R)} + (L-R) = \frac{J_0}{m(J_0/mR)} + \frac{J_0}{mR} = R + \frac{J_0}{mR} = L. \qquad (35)$$

Оказывается, что $L' = L$, и следовательно, если для физического маятника, подвешенного в какой-либо точке, найти центр качания, а затем подвесить его в центре качания, то период колебаний остается прежним, а бывшая точка подвеса станет центром качания.

8. ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ

Если не учитывать силы трения, то согласно формулам, полученным в §5, упругие и квазиупругие колебания будут гармоническими. Это означает, что их амплитуда не зависит от времени, и система, раз выведенная из положения равновесия, будет колебаться бесконечно долго. На самом же деле, как известно из опыта, колебания любой системы, если она не получает извне дополнительной энергии, в конце концов прекращаются, как говорят, затухают. Это происходит потому, что в реальных случаях всегда в системе имеются силы трения, благодаря которым энергия системы постепенно переходит в тепловую энергию.

Если скорость движения невелика, то в ряде случаев (трение в хорошо смазанных подшипниках, сопротивление воздуха) трение можно считать жидким, т.е. силы трения пропорциональными первой степени скорости:

$$f_{тр} = -bV = -b\frac{dX}{dt}. \tag{36}$$

Здесь b — коэффициент пропорциональности (коэффициент трения). Знак минус показывает, что сила трения направлена против движения (в сторону, противоположную скорости).

Для изучения колебательного движения при наличии трения обратимся снова к движению груза, подвешенного на пружине. В этом случае во второй закон Ньютона (12) кроме упругой силы (11) войдет еще сила трения (36):

$$ma = f + f_{тр}. \tag{37}$$

Откуда

$$m\frac{d^2X}{dt^2} = -kX - b\frac{dX}{dt} \quad \text{или} \quad \ddot{X} + \frac{b}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X = 0. \tag{38}$$

Решение этого уравнения движения, т.е. нахождение функции времени $X = X(t)$, удовлетворяющий закону Ньютона в любой момент времени, довольно сложно. Приведем здесь сразу окончательное выражение:

$$X(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\sin(\omega t+\varphi). \qquad (39)$$

Здесь ω определяется механическими свойствами системы (ее параметрами — упругостью пружины k, массой груза m и коэффициентом трения b):

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}. \qquad (40)$$

В справедливости этого решения можно убедиться, подставив в (38) выражение (39) и приняв во внимание (40). При этом левая часть уравнения (38) окажется тождественно равна правой.

Колебания, закон которых выражается формулой (39), уже не будут гармоническими. В формулу (39) входят два множителя, зависящих от времени. Один из них — $\sin(\omega t + \varphi)$ — является периодической функцией времени, а другой — $e^{-\frac{b}{2m}t}$ — с течением времени убывает. Если коэффициент трения мал, т.е. $\frac{k}{m} > \left(\frac{b}{2m}\right)^2$, то величину $A_1 = Ae^{-\frac{b}{2m}t}$ можно считать амплитудой, которая уменьшается с течением времени по показательному (экспоненциальному) закону. Отношение двух последовательных амплитуд (т.е. амплитуд, взятых через промежуток времени, равный периоду T)

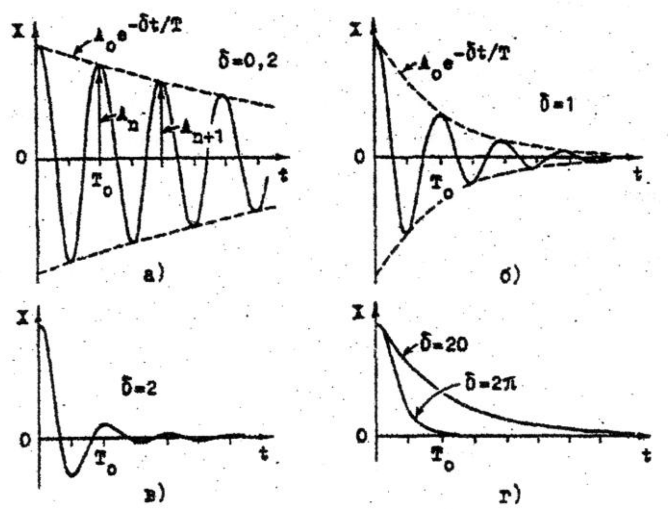


Рис. 8

$$\Delta = \frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{Ae^{-\frac{b}{2m}t}}{Ae^{-\frac{b}{2m}(t+T)}} = e^{\frac{b}{2m}T} \qquad (41)$$

не зависит от времени, а зависит только от механических свойств системы и может служить характеристикой затухания колебаний. Это отношение называется *декрементом* затухания. Чем больше декремент затухания, тем скорее уменьшается амплитуда. Часто затухание характеризуют натуральным логарифмом этого отношения:

$$\delta = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{b}{2m} T \,. \tag{42}$$

Величина δ называется *логарифмическим декрементом затухания*.

При малом затухании логарифмический декремент δ имеет очень простой физический смысл. Он показывает, на какую долю своей величины амплитуда уменьшается за период. В самом деле, из формулы (41) следует, что

$$A_{n+1} = A_n e^{-\frac{b}{2m}T} = A_n e^{-\delta}$$

Отсюда

$$A_n - A_{n+1} = A_n \left(1 - e^{-\delta}\right).$$

И если воспользоваться формулой

$$e^{-\delta} \approx 1 - \delta,$$

то получится

$$\frac{A_n - A_{n+1}}{A_n} \approx \delta \,. \tag{43}$$

При очень больших коэффициентах трения b [когда $k/m < (b/2m)^2$], несмотря на наличие сил, возвращающих систему в положение равновесия, колебания не возникают. Система возвращается в положение равновесия асимптотически (не переходя положения равновесия). Такое движение называется *апериодическим*. На рис. 8 показан характер колебаний при различных декрементах затухания.

Затухание колебаний по показательному закону происходит только в том случае, когда сила трения пропорциональна скорости. При этом отношение двух последовательных амплитуд (декремент затухания) остается постоянным. При других типах сил трения и закон затухания получается другим. Могут быть колебательные системы, в которых жидкое трение пропорционально квадрату скорости; в иных системах имеется сухое трения. Если на опыте получается, что отношение двух последовательных амплитуд не является постоянным, то это означает, что трение в этой системе не пропорционально скорости.

9. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Колебания, которые происходят в системе под действием периодически изменяющейся силы, называются *вынужденными колебаниями*. Как показывает опыт, частота вынужденных колебаний совпадает с частотой вынуждающей силы.

В качестве примера системы, совершающей вынужденные колебания, рассмотрим колебания груза массы m, подвешенного на пружине с коэффициентом жесткости k. Будем предполагать, что на груз действует вынуждающая сила, изменяющаяся по периодическому закону:

$$F = F_0 \sin \omega t \tag{44}$$

с угловой частотой ω, периодом $T = 2\pi/\omega$ и амплитудой F_0. Мы предположим еще, что на груз во время его движения действует сила трения $f_{тр}$, пропорциональная первой степени скорости. Силу тяжести, действующую на груз, не будем принимать во внимание, так как она уравновешивается начальным натяжением пружины.

Для нахождения положения груза X как функции времени напишем второй закон Ньютона с учетом всех сил, действующих на груз: силы упругости пружины $f = -kX$, силы трения $f_{тр} = -bV = -b\dfrac{dX}{dt}$, и вынуждающей силы $F = F_0 \sin \omega t$:

$$ma = f + f_{тр} + F \tag{45}$$

или

$$m\frac{d^2X}{dt^2} = -kX - b\frac{dX}{dt} + F_0 \sin \omega t\,. \tag{46}$$

Наконец, если мы разделим на m обе части уравнения (46) и оставим справа только вынуждающую силу, то получим:

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = \frac{F_0}{m}\sin \omega t\,. \tag{47}$$

Здесь $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ — собственная частота колебаний груза (без учета трения). Выражение (47) представляет собой уравнение движения груза.

В случае свободных (собственных) колебаний амплитуда и начальная фаза определяются начальными условиями (величиной скорости и смещения в начальный момент времени), а частота зависит только от свойств самой системы (ее параметров k и m). Частота вынужденных колебаний определяется частотой вынуждающей силы. Поэтому можно предположить, что, если груз раскачивает сила, изменяющаяся по гармоническому закону, то груз будет колебаться также по гармоническому закону с той же частотой, т.е. смещение груза будет

$$X = A\sin\left(\omega t + \varphi\right). \qquad (48)$$

Здесь φ представляет собой разность фаз колебаний груза и вынуждающей силы. Амплитуда вынужденных колебаний A и разность фаз φ должны зависеть от величин, характеризующих систему (ее параметров m, k, b, ω_0), и величин, характеризующих вынуждающую силу (F_0 и ω). Эту зависимость можно найти следующим путем. Предполагая, что X имеет вид (48), найдем скорость и ускорение груза, т.е. dX/dt [см. формулы (5), (6) §3]. Так как закон Ньютона должен выполняться в любой момент времени, то, подставляя X, dX/dt, d^2X/dt^2 в левую часть уравнения (47), мы должны подобрать такие значения A и φ, чтобы в любой момент времени левая часть уравнения была равна правой. Если мы сумеем это сделать, мы тем самым, кстати, докажем справедливость нашего предположения о том, что под действием гармонической вынуждающей силы груз совершает гармонические колебания.

Оказывается, что уравнение (47) обращается в тождество, если X выражается формулой (48),

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{b^2}{m^2}\omega^2}} \qquad (49)$$

и

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b\omega}{m\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)}. \qquad (50)$$

Для вывода формул (49) и (50) нужно подставить в левую часть уравнения (47) $X = A\sin(\omega t + \varphi)$, $dX/dt = \omega A\cos(\omega t + \varphi)$ и $d^2X/dt^2 = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi)$ и разложить выражения $\sin(\omega t + \varphi)$ и $\cos(\omega t + \varphi)$ по формулам для синуса и косинуса суммы углов. Затем нужно сгруппировать члены так, чтобы можно было вынести за скобки $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$. Если скобку, стоящую множителем при $\cos\omega t$ приравнять нулю, а скобку, стоящую множителем при $\sin\omega t$, приравнять F_0/m, то левая часть уравнения (47) будет равна правой для любого момента времени t. В результате для определения A и φ получается два уравнения:

$$A\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\sin\phi+\frac{b}{m}\omega A\cos\phi=0,$$

$$A\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\cos\phi-\frac{b}{m}\omega A\sin\phi=\frac{F_0}{m}. \qquad (51)$$

Из первого уравнения сразу следует формула (50), а для получения формулы (49) надо оба уравнения (51) возвести в квадрат и сложить, учитывая, что $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$.

Рассмотрим зависимость амплитуды вынужденных колебаний от параметров системы и вынуждающей силы. Из формулы (49) видно, что амплитуда вынужденных колебаний A пропорциональна амплитуде вынуждающей силы F_0 и зависит от соотношения частот между величиной собственной частоты системы ω_0 и величиной частоты вынуждающей силы ω. Когда частота вынуждающей силы стремится к нулю (очень медленные колебания), амплитуда вынужденных колебаний стремится к величине $A_0=F_0/m\omega_0^2$. При увеличении ω амплитуда A сначала увеличивается, так как уменьшается знаменатель в формуле (49) (уменьшается величина разности $\omega_0^2-\omega^2$), до тех пор, пока ω не приблизится к ω_0. При дальнейшем увеличении ω знаменатель в формуле (49) начинает увеличиваться. При этом амплитуда A стремится к нулю при ω, стремящемся к бесконечности. На графике (рис. 9) зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы изобразится кривой, имеющей максимум вблизи $\omega=\omega_0$. Явление, заключающееся в увеличении амплитуды вынужденных колебаний, когда частота вынуждающей силы приближается к собственной частоте системы, называется *резонансом*, а график зависимости амплитуды от частоты вынуждающей силы — *амплитудной резонансной кривой*.

Приравняв нулю производную по ω подкоренного выражения в формуле (49), можно найти точное значение, при котором амплитуда A достигает максимума:

$$\omega_{рез}=\sqrt{\omega_0^2-\frac{b^2}{2m^2}}. \qquad (52)$$

Следовательно, только при условии, что можно пренебречь трением (при $\omega_0 > b/m$) выполняется равенство $\omega_{рез} = \omega_0$. Можно также показать, что когда трение мало, амплитуда A имеет максимальное значение

$$A_{рез} = \frac{F_0}{b\omega} = \frac{F_0 \pi}{m\omega^2 \delta}. \qquad (53)$$

Отсюда видно, что $A_{рез}$ обратно пропорциональна коэффициенту трения b или логарифмическому декременту затухания δ [согласно формуле (42) §8 $\delta = (b/2m)T = \pi b/(m\omega_0)$]. Если бы мы не принимали во внимание трения ($b = 0$) при выводе формулы (49), то мы получили бы, что при резонансе амплитуда становится бесконечной [нуль в знаменателе формулы (53)], чего на самом деле никогда не бывает.

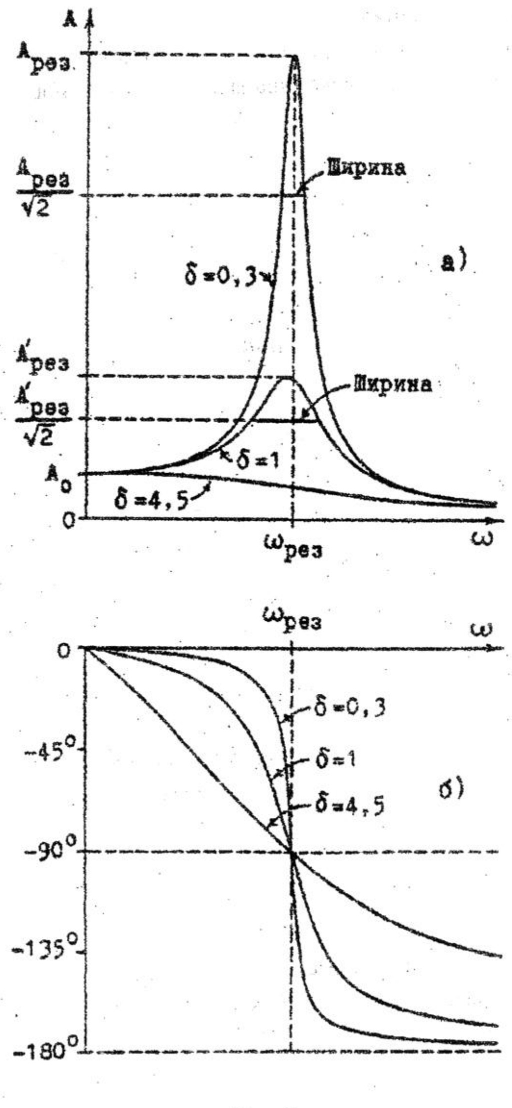


Рис.9

Если увеличить декремент затухания, не изменяя остальных параметров системы и вынуждающей силы, то резонансная кривая на графике пойдет ниже (рис. 9,а). Резонанс становится менее резко выраженным. При очень большом затухании ($\delta \geq \pi\sqrt{2}$) максимум вообще исчезает.

Затухание в системе характеризуют также шириной $\Delta\omega$ резонансной кривой на высоте, равной $A_{рез}/\sqrt{2}$. Рис. 9,а показывает, что ширина кривой $\Delta\omega$ на этой высоте приблизительно пропорциональна логарифмическому декременту затухания δ.

Если мы хотим добиться, чтобы система под действием вынуждающих сил различной частоты сильно раскачивалась только от силы с определенной частотой и мало реагировала на другие частоты, то нужно, во-первых, подобрать подходящую собственную частоту системы и, во-вторых, позаботиться о том, чтобы трение было возможно меньше. Если же нам, наоборот, нужно, чтобы система под действием периодических вынуждающих сил колебалась возможно меньше, необходимо увеличить затухание.

Когда на систему начинает действовать периодически изменяющаяся сила, то амплитуда вынужденных колебаний постепенно возрастает до того значения, которое она должна иметь согласно формуле (49) для данного соотношения частот ω и ω_0. Одновременно с вынужденными колебаниями при включении вынуждающей силы (или при любом изменении ее частоты или амплитуды) возникают собственные колебания системы, которые складываются с вынужденными колебаниями. Собственные колебания постепенно затухают, и амплитуда вынужденных колебаний устанавливается. Если декремент затухания мал, то установление амплитуды происходит долго. Часто в результате сложения вынужденных и собственных колебаний (вблизи резонанса, когда собственная частота близка к частоте вынуждающей силы) возникают биения.

Графики зависимости фазы φ вынужденных колебаний от ω при нулевой фазе вынуждающей силы называются фазовыми резонансными кривыми. Из формулы (50) следует, что

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b\omega}{m\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)}. \tag{54}$$

Резонансные кривые, построенные с помощью этой формулы для различных значений логарифмического декремента затухания δ показаны на рис. 9,б. Значения отрицательны для любых ω, т.е. вынужденные колебания всегда отстают по фазе от колебаний вынуждающей силы. При любых значениях δ фаза вынужденных колебаний $\varphi = \pi/2$ при $\omega = \omega_0$. Если значение δ мало, то при $\omega < \omega_0$ значения φ малы, и вынужденные колебания имеют фазу, которая мало отличается от фазы вынуждающей силы. Вблизи резонанса значения φ в этом случае резко изменяются и после резонанса приближаются к $-\pi$, т.е. вынужденные колебания происходят практически в противофазе по отношению к колебаниям вынуждающей силы.

Все выводы, которые мы сделали для вынужденных колебаний системы с упругой силой, верны, конечно, и для любых систем с квазиупругими силами. Общий же характер поведения амплитуды системы, совершающей вынужденные колебания, в зависимости от соотношения между собственной частот ой системы и частотой внешних воздействий (резонанс) сохраняется для любых физических величин, хотя амплитуды при этом могут и не быть смещениями точки, а внешние воздействия не представлять собой механических сил (например, величина силы тока, возникающего в контуре радиоприемника под действием переменного электромагнитного поля).

Нужно, однако, отметить, что в тех случаях, когда действующие в системе силы не пропорциональны первой степени смещения, или силы трения не пропорциональны первой степени скорости (при так называемых нелинейных колебаниях), резонансные кривые могут сильно отличаться от изображенных на рис. 9. Например, они могут быть значительно более несимметричными, на них могут появиться дополнительные максимумы и т.д.

10. КОЛЕБАНИЯ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ

Связанной системой мы будем называть *сложную* систему, в которой можно выделить несколько отдельных *более простых* систем, причем колебания в каждой из этих систем влияют на колебания во всех остальных.

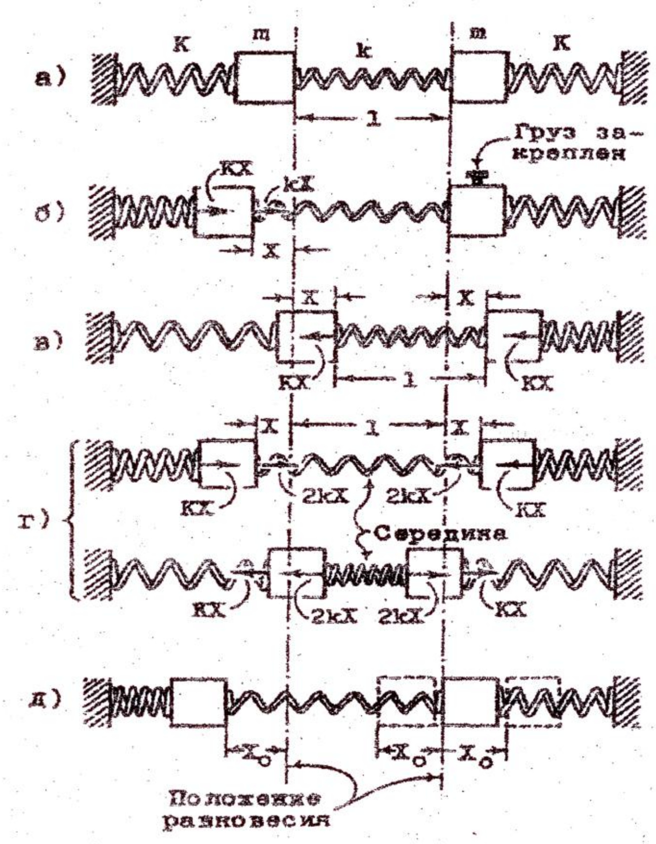


Рис.10

Для изучения колебаний, происходящих в связанных системах, в качестве наиболее простой связанной системы возьмем два груза с одинаковыми массами m, которые прикреплены к двум одинаковым пружинам с коэффициентами жесткости K и связаны между собой слабой пружинкой с коэффициентом жесткости k, как показано на рис. 10,а. Для того чтобы исключить из рассмотрения силу тяжести, будем считать, что грузы надеты на гладкий стержень. Силами трения будем пренебрегать. Если бы пружинки k не было, то каждый из грузов мог бы совершать колебания с собственной частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \,. \tag{55}$$

Для изучения сложной системы часто бывает удобно разбить ее на несколько отдельных систем, не связанных между собой. Это можно сделать, обычно, несколькими различными способами. Одним из таких способов для нашей системы будет закрепление одного из грузов в положении равновесия. Система, полученная из сложной, закреплением всех материальных точек, кроме одной, называется *парциальной*. Собственная частота парциальной системы называется *парциальной частотой*.

В нашем случае парциальная частота каждого груза будет определяться его массой и действием двух пружин, большой K и малой k. Если в положении равновесия пружины не деформированы, а один из грузов закреплен, то при смещении груза из положения равновесия одна из пружин сжимается, а другая растягивается (рис. 10,б). Силы, с которыми они действуют на груз, будут направлены в одну сторону — к положению равновесия. Поэтому их равнодействующая будет

$$F = f_K + f_k = -KX - kX = -\left(K + k\right) X \,, \tag{56}$$

т.е. две пружины с коэффициентами жесткости K и k можно заменить одной с коэффициентом жесткости $K + k$. Следовательно, парциальная частота груза будет определяться формулой

$$\omega_{пар} = \sqrt{\frac{K + k}{m}} \,. \tag{57}$$

То же самое получится при закреплении второго груза. Ясно, что парциальные частоты будут больше собственных частот отдельных грузов без связывающей пружинки k.

Рассмотрим теперь случай, когда оба груза не закреплены. Возбудить колебания в такой системе можно, например, выведя из положения равновесия оба груза, а затем их отпустив. При этом каждому грузу можно сообщить самые различные начальные отклонения. Рассмотрим два случая из возможных начальных отклонений:

1) оба груза отклонены от положения равновесия на одинаковое расстояние в одну сторону — либо оба вправо, либо оба влево;
2) оба груза отклонены на одинаковое расстояние, но в *разные* стороны.

Легко заметить, что в первом случае в любой момент времени пружинка k будет сохранять свою первоначальную длину l, так как расстояние между грузами в процессе колебаний не будет изменяться, (грузы колеблются в одинаковых фазах с равными амплитудами) (рис. 10,в). Следовательно, связь между грузами не будет играть никакой роли (если ее удалить, то ничего не изменится). Грузы при этом будут колебаться с частотой ω_1, которая обусловлена только пружиной K и поэтому равна собственной частоте без связи:

$$\omega_1 = \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} . \tag{58}$$

Во втором случае пружинка k будет сжиматься и разжиматься, но ее средняя точка будет все время оставаться неподвижной. Это равносильно закреплению пружинки k в ее средней точке (рис. 10,г). Если ее в самом деле закрепить в этой точке, то колебания каждого груза можно рассматривать отдельно, считая, что они происходят под действием пружины K и половины пружинки k. Половина пружины обладает вдвое большей жесткостью, чем целая. Это происходит потому, что жесткость определяется силой, которая требуется для растяжения пружины на единицу длины, а для растяжения на единицу длины всей пружины каждый виток вдвое более короткой пружины нужно растянуть вдвое больше, чем каждый виток длинной пружины. Сила же, растягивающая пружину, определяется величиной деформации одного витка. Следовательно, в этом случае равнодействующая сил пружины K и половины пружинки k будет

$$F = -\left(K + 2k\right) X , \tag{59}$$

и колебания каждого груза будут происходить с частотой

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K + 2k}{m}} . \tag{60}$$

Мы видим, что при специальном выборе начальных отклонений каждый из грузов в нашей связанной системе совершает гармонические колебания, которые могут происходить с одной из двух частот ω_1 и ω_2. При этом ω_1 меньше, а ω_2 больше парциальной частоты $\omega_{пар}$. Гармонические колебания, происходящие в связанной системе, называются нормальными колебаниями, а частоты, с которыми они происходят, нормальными частотами. При любых других начальных отклонениях в системе возникают колебания, которые можно рассматривать как наложение происходящих одновременно двух нормальных колебаний с обеими частотами. Получающееся при этом колебание уже не является гармоническим.

В частности, когда в начальный момент из положения равновесия на расстояние X_0 отклонен только один из грузов, то положение второго груза в начальный момент (смещение его равно нулю) можно рассматривать как сумму одновременных отклонений его от положения равновесия на одинаковое расстояние с первым грузом вправо (на расстояние X_0 и влево (на расстояние $-X_0$) (рис 10,д). Отсюда можно сделать вывод, что в этом случае должны возникнуть колебания одновременно с обеими нормальными частотами, причем с одинаковой амплитудой. Мы уже знаем, что в этом случае возникают биения с частотой (см. §4)

$$N = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}. \qquad (61)$$

При этом груз, начавший колебаться, через некоторое время остановится, но зато груз, бывший вначале неподвижным, начнет колебаться, затем снова придет в движение первый груз, а второй остановится и т.д. (до тех пор, пока колебания не затухнут вследствие наличия в системе трения).