6 МАЯТНИК МАКСВЕЛЛА

Цель работы

Изучение законов динамики и закона сохранения энергии при плоском движении твердых (тел на примере маятника Максвелла) и измерение момента инерции.

Идея эксперимента

В эксперименте используется маятник Максвелла – устройство, состоящее из массивного маховика, ось которого подвешена на двух нитях. Маятник способен совершать повторяющиеся движения вверх-вниз, при которых все его точки перемещаются в параллельных плоскостях, т. е. движение маятника Максвелла – плоское.

Теоретическое введение

В классической механике все три закона сохранения – закон сохранения импульса, закон сохранения момента импульса, закон сохранения механической энергии – являются теоремами, которые доказываются на основе трех законов Ньютона. Рассмотрим каждый из этих законов.

Для определенности введем понятия ***изолированной*** и ***замкнутой*** систем тел.

Замкнутой называют такую систему тел, для которой суммарное действие всех внешних сил равно нулю.

Изолированной называется такая система тел, на которую не действуют внешние силы.

Закон сохранения импульса. Рассмотрим систему взаимодействующих между собой материальных точек с массами m_i. В силу третьего закона Ньютона для сил взаимодействия двух материальных точек с номерами i и j: $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$. Пусть на систему действуют внешние силы. В этом случае уравнение движения материальной точки с номером i имеет следующий вид:

$$m_i \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_i}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}_i + \sum \mathbf{F}_{ij} . \qquad (6.1)$$

Просуммируем эти уравнения по i и учтем, что $\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$. В результате получим

$$\sum m_i \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_i}{\mathrm{d}t} = \sum \mathbf{F}_i \,. \tag{6.2}$$

В том случае, когда система тел является замкнутой, $\sum \mathbf{F}_i = 0$ и

$$\sum m_i \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_i}{\mathrm{d}t} = 0 \,,$$

или

$$\sum m_i \mathbf{v}_i = \mathrm{const} \,. \tag{6.3}$$

Соотношение (6.3) выражает ***закон сохранения импульса***: *суммарный импульс замкнутой системы тел сохраняется неизменным.*

Закон сохранения момента импульса. Моментом импульса материальной точки с радиус-вектором **r** и импульсом **p** называется векторное произведение

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\boldsymbol{\upsilon} \,.$$

Обозначим момент импульса системы материальных точек относительно некоторой точки О через **L**, радиус-вектор i-й материальной точки $\mathbf{r}_i$:

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \boldsymbol{\upsilon}_i \tag{6.4}$$

Аналогично тому, как это было сделано выше, возьмем за основу уравнение движения произвольной материальной точки (6.1):

$$m_i \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_i}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}_i + \sum_j \mathbf{F}_{ij} \,.$$

Умножим левую и правую части векторно на $\mathbf{r}_i$ и просуммируем по i. Учитывая, что

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ij} = 0 \,,$$

получим:

$$\sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \,. \tag{6.5}$$

Воспользуемся определением момента импульса (6.4) и найдем его производную по времени:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i m_i \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t} \times \mathbf{v}_i + \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_i}{\mathrm{d}t} \,. \tag{6.6}$$

Первый член в правой части (6.6) равен нулю, так как $\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}_i}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}_i \,.$

Следовательно,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{v}}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{M},$$

где

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \tag{6.7}$$

– момент внешних сил относительно точки O.

Таким образом, закон изменения момента импульса:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}. \tag{6.8}$$

Если момент внешних сил равен нулю, $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$, то

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \text{const}. \tag{6.9}$$

Следовательно, ***суммарный момент импульса системы тел относительно некоторой точки пространства сохраняется неизменным, если суммарный момент всех внешних сил относительно этой же точки равен нулю (закон сохранения момента импульса).***

Рассмотрим случай, когда система материальных точек вращается вокруг закрепленной оси, например совпадающей с осью z: $\boldsymbol{\omega}=\{0, 0, \omega\}$. В этом случае

$$L_z = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i))_z = \omega \sum m_i \rho_i^2, \tag{6.10}$$

где ρ_i – расстояние от оси z до i-ой точки, т.е.

$$L_z = J_z \omega_z. \tag{6.11}$$

Величина $J_z = \sum m_i \rho_i^2$ называется моментом инерции системы материальных точек относительно оси вращения z.

Закон сохранения механической энергии. Пусть на материальную точку массой m в любой точке пространства действует сила, которая может быть представлена в виде градиента от некоторой функции $U(x,y,z)$:

$$\mathbf{F} = -\text{grad}U, \tag{6.12}$$

то наряду с кинетической энергией $mv^2/2$ можно ввести в рассмотрение потенциальную энергию U, при этом будет сохраняться полная энергия $E = mv^2/2+U$. Для доказательства этого утверждения рассмотрим уравнение движения этой материальной точки (второй закон Ньютона):

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\mathrm{grad}U(r)\,. \tag{6.13}$$

Умножим левую и правую части уравнения (6.13) на dr = υ dt и проинтегрируем. Учитывая, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \ddot{r}dr = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\upsilon}\upsilon \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{\upsilon_2^2}{2} - \frac{\upsilon_1^2}{2} \tag{6.14}$$

и

$$\int_{r_1}^{r_2} \mathrm{grad}U\mathrm{d}r = \int_{U(r_1)}^{U(r_2)} \mathrm{d}U = U(r_2) - U(r_1)\,, \tag{6.15}$$

получим:

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2} + U(r_2) = \frac{m\upsilon_1^2}{2} + U(r_1). \tag{6.16}$$

Соотношение (6.16) выражает закон сохранения механической энергии для материальной точки.

Таким образом, **механическая энергия материальной точки сохраняется, если все действующие на нее силы потенциальны.**

Аналогично, в механической системе, в которой действуют только консервативные силы, механическая энергия сохраняется.

Условием потенциальности поля сил, т.е. условием выполнения (6.12), является 1) равенство нулю работы по замкнутому пути или 2) независимость работы от траектории движения между начальной и конечной точками. Сама потенциальная функция $U(r)$ определяется с точностью до константы. Эту неоднозначность можно устранить, задав значение U в некоторой точке поля.

Примером потенциального поля является поле сил тяжести вблизи поверхности Земли. В этом случае, если направить ось OZ по вертикали вверх, то потенциальная функция имеет вид:

$$U(z) = mgz, \tag{6.17}$$

где z – координата центра тяжести тела, а проекции силы тяжести:

$$F_x = 0,\ \ F_y = 0,\ \ F_z = -mg. \tag{6.18}$$

Для упругих сил, возникающих при смещении x из положения равновесия (z = const, y = const),

$$F = -kx\,, \tag{6.19}$$

а потенциальная энергия равна работе упругих сил с обратным знаком:

$$U(x) = -\int_0^x F dx = \frac{1}{2}kx^2. \tag{6.20}$$

Описать движение твердого тела как движение материальной точки можно лишь в случае поступательного движения. Если тело вращается вокруг некоторой оси, то отдельные элементы тела при этом будут иметь различные скорости и различные перемещения.

Кинетическую энергию твердого тела можно найти как сумму энергий составляющих его материальных точек. Скорость каждой точки $\boldsymbol{\upsilon}_i$ можно представить как сумму скорости поступательного движения центра масс $\boldsymbol{\upsilon}_c$ и скорости вращательного движения вокруг него с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$

$$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i \boldsymbol{\upsilon}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i (\boldsymbol{\upsilon}_c + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i)^2\ , \tag{6.21}$$

где $\mathbf{r}_i$ – радиус-вектор точки относительно центра масс. Раскроем квадрат скорости

$$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i \boldsymbol{\upsilon}_c^2 + \sum_i m_i \boldsymbol{\upsilon}_c(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i) + \frac{1}{2}\sum_i m_i(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i)^2\,. \tag{6.22}$$

Первое слагаемое

$$\frac{1}{2}\sum_i m_i \boldsymbol{\upsilon}_c^2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\upsilon}_c^2\sum_i m_i = \frac{1}{2}M\boldsymbol{\upsilon}_c^2,$$

где M – полная масса тела. Второе слагаемое равно нулю

$$\sum_i m_i \boldsymbol{\upsilon}_c(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i) = \boldsymbol{\upsilon}_c(\boldsymbol{\omega}\times\sum_i m_i\mathbf{r}_i) = 0$$

(для центра масс $\sum_i m_i\mathbf{r}_i = 0$).

Введем скорость вращения относительно центра масс $\boldsymbol{\upsilon}'_i = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i$. Тогда для третьего слагаемого получаем

$$\frac{1}{2}\sum_i m_i(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i)^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i\boldsymbol{\upsilon}'_i(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i) = \frac{1}{2}\sum_i \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}_i\times m_i\boldsymbol{\upsilon}'_i) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\mathbf{L}\,, \tag{6.23}$$

где $\mathbf{L}$ – момент импульса тела относительно центра масс. Таким образом, кинетическую энергию твердого тела можно представить как сумму энергии поступательного движения всего тела со скоростью центра масс, и энергии вращательного движения вокруг центра масс

$$K = \frac{1}{2} M \boldsymbol{\upsilon}_c^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \mathbf{L} \,. \qquad (6.24)$$

Если движение тела плоское, то вектор $\boldsymbol{\omega}$ постоянен по направлению (например, направлен вдоль оси z) $\boldsymbol{\omega} = \{0, 0, \omega\}$, а скорости всех точек перпендикулярны $\boldsymbol{\omega}$. Тогда

$$\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \mathbf{L} = \frac{1}{2} \omega_z L_z = \frac{1}{2} J_z \omega_z^2 \qquad (6.25)$$

и

$$K = \frac{1}{2} M \boldsymbol{\upsilon}_c^2 + \frac{1}{2} J_z \omega_z^2 \,. \qquad (6.26)$$

Перейдем к рассмотрению маятника Максвелла, который изображен на рис. 6.1. Маятник состоит из тонкого *металлического стержня* 1, играющего роль оси, с симметрично укрепленным на нем *маховиком* 2. Две *нити подвеса* 3 прикреплены к *планке* 4, установленной на *штативе* 5 с массивным *основанием* 6. Другие концы нитей плотно, виток к витку, наматываются на стержень, пока маховик не займет верхнее положение у планки 4. После освобождения маятник под действием силы тяжести начинает движение: поступательное – вниз и вращательное – вокруг своей оси. В нижней точке, когда нити полностью размотаны, вращение, продолжаясь по инерции, приводит к наматыванию нитей на стержень и новому подъему маятника. Движение маятника вверх замедляется, он останавливается, а затем снова начинается движение вниз и т.д. Такой колебательный характер движения вверх-вниз напоминает движение маятника, поэтому устройство называется маятником Максвелла. Причина такого

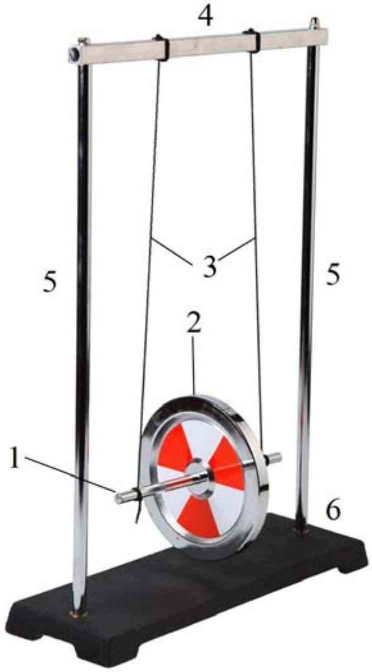

Рис. 6.1. Принципиальная схема маятника Максвелла.

названия остается неясной, поскольку в трудах самого Максвелла описание такого устройства не встречается.

Цикл движения маятника Максвелла подразделяется на три стадии: спуск, удар в нижней точке и движение вверх.

Удар при опускании маятника отличается от удара, например, шарика о плиту. Кинетическая энергия падающего тела (шарика) на первой стадии удара исчезает полностью, превращаясь в потенциальную энергию упругой деформации. При ударе маятника остается кинетическая энергия его вращения, которая гораздо больше, чем кинетическая энергия поступательного движения перед ударом.

Рассмотрим отдельно стадии движения, используя ряд упрощающих предположений.

Движение маятника Максвелла – пример плоского движения, поскольку скорости всех точек лежат в параллельных плоскостях. Если в кинематике в качестве оси вращения может быть выбрана любая точка тела, то в динамике обычно выбирается центр масс тела. Это позволяет применять теорему о движении центра масс и уравнение моментов в его простейшем виде, без учета моментов сил инерции.

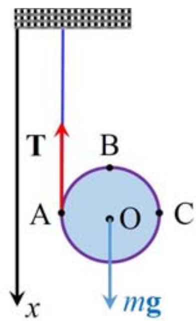

Рис. 6.2. Ось маховика и приложенные силы.

Если маятник был запущен при вертикальном положении нитей, то при движении вниз это положение сохраняется ввиду отсутствия горизонтальных составляющих внешних сил (рис. 6.2; точкой A обозначен след мгновенной оси вращения).

Небольшая горизонтальная составляющая у силы натяжения нитей появляется только в результате удара: нити отклоняются от вертикали на величину порядка диаметра вала (рис. 6.3 *б, в*). В результате возникают небольшие по амплитуде колебания в горизонтальной плоскости, период которых, как и у любого маятника, зависит от длины нитей. Эти колебания, затухая, будут продолжаться и во время подъема маятника.

Рассмотрим движение маятника Максвелла вниз. Пренебрегая силами сопротивления и массой нитей, запишем уравнение поступательного движения центра масс в системе отсчета, неподвижной относительно точки подвеса:

$$ma = mg - 2T\,, \qquad (6.27)$$

и уравнение вращательного движения относительно центра масс:

$$J\varepsilon = 2rT\ . \tag{6.28}$$

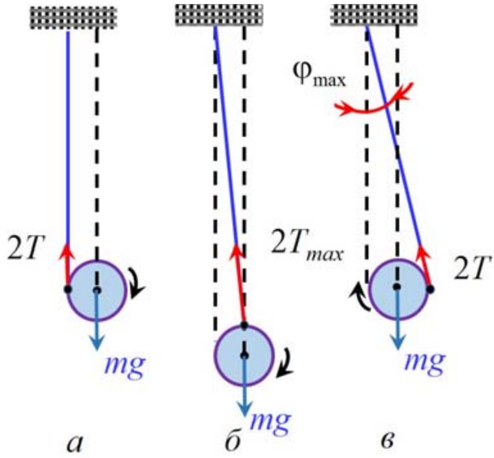

Рис. 6.3. Три последовательных положения оси маятника в нижней точке: в начале — (*а*), в середине — (*б*) и в конце — (*в*) удара.

При условии нерастяжимости иитей уравнение кинематической связи имеет вид:

$$a = \varepsilon r\ . \tag{6.29}$$

В (6.27) и (6.28) m – масса маятника, J – момент инерции маятника относительно его оси, r – радиус оси маятника, T – сила натяжения каждой нити, mg – сила тяжести, a – ускорение центра масс маятника, ε – угловое ускорение маятника. При движении маятника вниз начальная скорость его центра масс равна нулю. Решая систему уравнений (6.27–6.29), находим ускорение центра масс:

$$a = \frac{g}{1 + J/mr^2}\ . \tag{6.30}$$

Момент инерции маятника можно представить в виде $J = kmR^2$, где R – радиус маховика (например, для диска безразмерный коэффициент $k = 1/2$). Тогда $J/mr^2 = k(R/r)^2$. Для маятника Максвелла $R >> r$, поэтому ускорение поступательного движения маятника мало ($a << g$), а суммарная сила натяжения нитей равна $2T = m(g - a) \approx mg$. В любой момент времени отношение кинетической энергии вращения к кинетической энергии поступательного движения равно

$$\frac{E_{\text{вращ}}}{E_{\text{пост}}} = k\left(\frac{R}{r}\right)^2 >> 1\,, \tag{6.31}$$

то есть при движении маятника вниз большая часть потенциальной энергии маятника переходит в энергию вращения.

Рассмотрим теперь движение маятника Максвелла, исходя из закона сохранения энергии и считая, что ее потерями на трение можно пренебречь. Полная энергия есть сумма потенциальной энергии и кинетической энергии поступательного и вращательного движений:

$$E = -mgx + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \text{const}\,, \tag{6.32}$$

где потенциальная энергия здесь отсчитывается от верхней точки $(x = 0)$, v – скорость центра масс, ω – угловая скорость вращения. Поскольку в процессе движения механическая энергия сохраняется, то ее производная по времени равна нулю:

$$\dot{E} = -mgv + mva + J\omega\varepsilon = 0\,. \tag{6.33}$$

Учитывая кинематическую связь $\omega = v/r$ и сокращая на общий множитель $v,$ снова получаем для ускорения выражение (6.30).

Теперь рассмотрим удар в нижней точке движения маятника. Явление удара сопровождается резкими изменениями сил взаимодействия за очень короткий промежуток времени. Эти силы сначала нарастают, а затем убывают. Их зависимость от времени, как правило, не известна, что затрудняет применение уравнений движения в явном виде.

Приравняем импульс сил за время удара и изменение импульса маховика:

$$F_{\text{ср}}\Delta t = m(v_1 + v_2)\,, \tag{6.34}$$

где m – масса всего маятника, v_1 и v_2 – его скорости до и после удара, $F_{\text{ср}}$ – средняя вертикальная сила, действующая на тело во время удара, Δt – длительность удара. Поскольку при ударе ось поворачивается почти на половину оборота, и точка крепления нити проходит путь πr, для оценки времени удара можно использовать формулу:

$$\Delta t = \frac{\pi r}{v_{\text{ср}}} \simeq \frac{2\pi r}{v_1 + v_2}\,, \tag{6.35}$$

где $\upsilon_{\text{ср}}$ – средняя скорость маятника. Отсюда

$$F_{\text{ср}} = \frac{m(\upsilon_1 + \upsilon_2)^2}{2\pi r}. \tag{6.36}$$

Эта сила складывается из среднего натяжения нитей во время удара $2T'$ и силы тяжести:

$$F_{\text{ср}} = 2T' - mg. \tag{6.37}$$

Учитывая, что при движении маятника сила натяжения нитей $2T \approx mg$, для дополнительного среднего натяжения за время удара получим:

$$2\Delta T = 2(T' - T) \simeq F_{\text{ср}} = \frac{m(\upsilon_1 + \upsilon_2)^2}{2\pi r}. \tag{6.38}$$

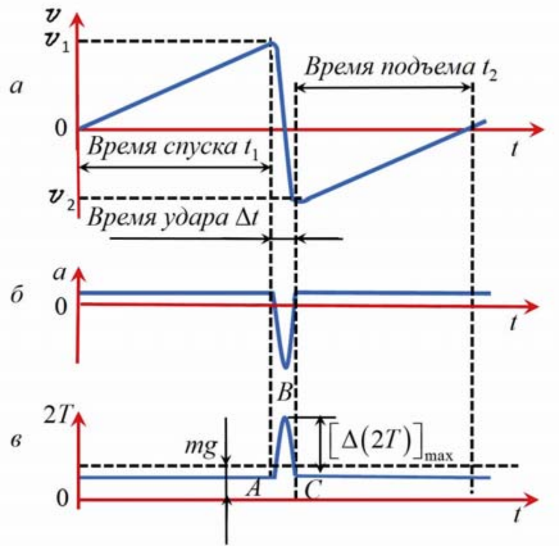

Рис. 6.4. Схематические зависимости от времени скорости υ (*а*) и ускорения *а* (*б*) центра масс маховика, а также силы натяжения нитей $2T$ (*в*)

Найдем теперь максимальную величину сил натяжения нитей. Поскольку горизонтальные силы малы из-за малого отклонения нитей от вертикали (рис. 6.3), можно считать, что за время удара центр тяжести маховика совершает только вертикальное перемещение вниз-вверх, а его координата $x \simeq l + r\sin\alpha$, где l – длина нити, α – угол поворота вала от начального положения нити в точке А. Согласно теореме о движении центра масс:

$$m\ddot{x} = mr\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(l + \sin\alpha) = mr(\ddot{\alpha}\cos\alpha - (\dot{\alpha})^2\sin\alpha) =$$

$$= 2T'(\alpha) - mg \simeq 2\Delta T'(\alpha)\,.$$

Очевидно, что ускорение и натяжение нитей будут максимальны в тот момент, когда центр тяжести маятника будет в самом нижнем положении, а точки крепления нитей будут на уровне верхней точки вала B (рис. 6.3 *б*), что соответствует значению угла поворота $\alpha = \pi/2$. Учитывая, что $\dot{\alpha} = \omega \approx v_{\text{ср}}/r = (v_1 + v_2)/2r$, получаем:

$$2\Delta T'_{\max} = 2\Delta T'\frac{\pi}{2} = \frac{m(v_1 + v_2)^2}{4r} = \frac{\pi}{2}F_{\text{ср}}\,. \qquad (6.39)$$

Таким образом, максимальное увеличение силы натяжения нитей во время удара в $\pi/2$ раз превышает ее среднее значение. Параметры движения маятника на всех стадиях показаны на рис. 6.4.

Экспериментальная установка

Установка (рис. 6.5) состоит из штатива с двумя стойками и верхней *перекладиной* 5, к которой прикреплены *нити подвеса* 3 для *маховика маятника Максвелла* 1 с массой 470 г (вместе с осью). Нити накручиваются на *ось* 2 (радиусом 2,5 мм) маховика. Одна из

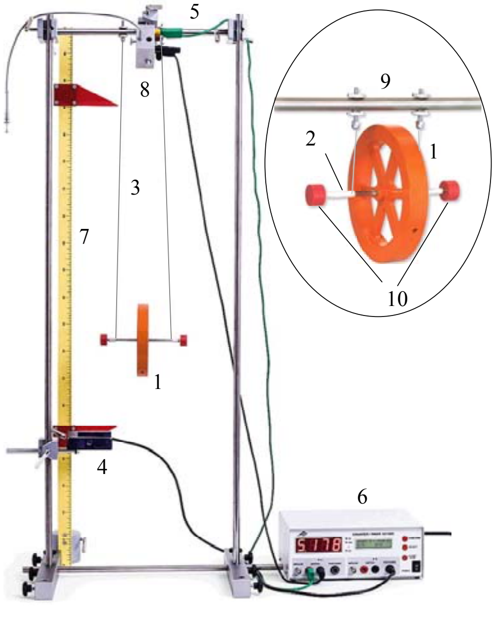

Рис. 6.5. Общий вид экспериментальной установки и увеличенное изображение маховика в верхней точке.

стоек используется для закрепления на ней *фотодатчика* 4 на любой высоте. Сигнал с датчика останавливает счет времени *таймера* 6.

Изучение плоского движения маятника Максвелла

Измерения

Все электрические и механические соединения на установке выполнены заранее, поэтому установка полностью готова к работе. Перед началом работы следует убедиться, что таймер включен (светится его индикатор). Переключатель режимов работы таймера устанавливают в положение измерения интервалов времени ΔT_{AB} (среднее положение из трех, диапазон «ms» индицируется красным светодиодом). При измерениях таймер запускается вручную кнопкой «Start» и останавливается сигналом от фотодатчика в момент его пересечения осью маховика.

Чтобы проверить работоспособность таймера запустите счет кнопкой «Start» и остановите счет, проведя рукой через луч фотодатчика (см. ***Приложение* 1**).

Координаты фотодатчика и маховика удобно отсчитывать с помощью рулетки.

1. Закрепите фотодатчик на стойке в верхнем положении (соответствует координате $x_1 \approx 160$ мм). Точно измерьте и запишите значение x_1 в табл. 6.1. Закручивая маховик на нитях за ручки 10 на концах его оси, поднимите его до касания с верхней перекладиной. При этом начальная координата центра оси маховика будет равна сумме его радиуса ($R = 65$ мм) и диаметра перекладины (12 мм), что составляет $x_0 = 77$ мм. Перемещение оси маховика отсчитывается от этого начального положения и выражается формулой: $x = x_1 - x_0$. При подъеме маховика нити должны укладываться плотно в один слой от точек закрепления на оси по направлению от концов оси к маховику. Если так не получается, значит ось маятника не горизонтальна. Выполнять работу в этом случае категорически нельзя; нужно отрегулировать длины нитей *регулировочными винтами* 9 до получения равномерной укладки нитей при закручивании оси.

Придерживая одной рукой маховик в верхнем положении, другой нажмите кнопку «Reset» для обнуления индикатора таймера. Установка готова к пуску.

Пуск. Одновременно отпустите маховик и нажмите кнопку «Start». Когда ось пройдет через фотодатчик и счет времени остановится, запишите показания таймера. После достижения нижнего положения маховик снова поднимется, но на меньшую высоту. Помогите ему снова подняться до перекладины, подкручивая ось.

Из-за субъективного фактора при ручном пуске маятника, измерения следует повторить 5 раз и подвергнуть результаты статистической обработке.

2. Аналогично проведите измерения при других значениях x_1, каждый раз опуская фотодатчик приблизительно на 4-5 см и измеряя его координату рулеткой. Самое низкое положение фотодатчика (при максимальной величине пути x) должно быть чуть выше оси висящего внизу маховика. Результаты запишите в табл. 6.1.

3. При выполнении последней серии измерений (для максимального пути маятника) измеряйте также координату x_2, до которой его ось поднимется после удара. Эти данные потребуются для расчета натяжения нитей при ударе.

Таблица 6.1

Время прохождения маятником заданных расстояний

x_1	x	x_2	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	$\overline{t}$	$\sigma_{\overline{t}}$	$\overline{t}^2$	$\sigma_{\overline{t}^2}$
мм	мм	мм	с	с	с	с	с	с	с	с^2	с^2
160	83										

Обработка результатов

1. По $n = 5$ результатам измерения времени для каждой длины пути рассчитайте среднее время движения:

$$\overline{t} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} t_k$$

и его выборочное стандартное отклонение:

$$\sigma_{\overline{t}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \overline{t})^2}\ .$$

Результаты запишите в табл. 6.1.

2. Чтобы проверить степень равноускоренности движения маятника и измерить величину ускорения, нужно построить график зависимости $\overline{t}^2(x)$ и сравнить его с графиком линейной зависимости $\overline{t}^2 = 2x/a$. Для этого рассчитайте и запишите в табл. 6.1 величины

$\overline{t}^{\,2}$ и их стандартные отклонения $\sigma_{\overline{t}^2} = 2\overline{t}\,\sigma_{\overline{t}}$. Убедитесь в линейности полученного графика $\overline{t}^{\,2}(x)$ и аппроксимируйте его линейной функцией с помощью стандартных программ МНК на компьютере, или, в крайнем случае, вручную графически. По найденным значениям коэффициента наклона A и его стандартной погрешности σ_A рассчитайте величину ускорения и его погрешность:

$$a = \frac{2}{A}, \ \sigma_a = a\frac{\sigma_A}{A}.$$

Используя найденное значение ускорения, рассчитайте величину момента инерции маховика по формуле:

$$J = mr^2\left(\frac{g}{a} - 1\right).$$

Ускорение свободного падения принять равным g = 9,801 м/с^2.

3. Найдите среднее значение и стандартную погрешность для координат x_2 подъема оси маятника после удара, измеренных для случая максимального пути маятника. По формулам (6.38) и (6.39) рассчитайте среднее увеличение силы натяжения нитей при ударе и его максимальное значение. Для нахождения скоростей до и после удара используйте формулы для равноускоренного движения: $\upsilon_1 = \sqrt{2a(x_1 - x_0)}$, $\upsilon_2 = \sqrt{2a(x_1 - x_2)}$.

Основные итоги работы

В результате выполнения лабораторной работы должны быть определены ускорение маятника Максвелла и момент инерции маховика.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение плоского движения.
2. Что такое центр масс системы? Сформулируйте теорему о движении центра масс.
3. Как изменяется кинетическая энергия маятника Максвелла в момент удара?
4. Сформулируйте закон изменения импульса системы тел.
5. Сформулируйте закон изменения механической энергии системы тел.
6. Выведите формулу для ускорения маятника Максвелла из законов динамики.

7. Выведите формулу для ускорения маятника Максвелла из закона сохранения энергии.
8. Получите формулу для расчета момента инерции диска.
9. Запишите систему уравнений, описывающих движение маятника Максвелла в неинерциальной системе отсчета, движущейся поступательно вместе с его центром масс.
10. Запишите систему уравнений для движения маятника Максвелла в инерциальной системе отсчета, используя точку C в качестве полюса для расчета моментов сил (рис. 6.2).
11. Выведите формулы для среднего и максимального натяжения нитей при ударе маятника Максвелла.
12. Найдите отношение кинетических энергий вращательного и поступательного движений маятника Максвелла.