МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В.ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

кафедра общей физики и физики конденсированного состояния

Методическая разработка

по общему физическому практикуму

Лаб. работа № 17

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ ОБОРОТНОГО МАЯТНИКА

Описание составили
профессор Казей З.А., доцент Белов Д.В.
и ст. преп. Платонова И.В.

МОСКВА 2021

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ ОБОРОТНОГО МАЯТНИКА

Цель работы

Целью работы является изучение колебаний физического маятника и определение ускорения свободного падения. Период колебаний физического маятника зависит от расстояния между точкой подвеса и центром масс маятника. Удобно использовать физический маятник в виде стержня с двумя закрепленными призмами (оборотный маятник) и двумя дополнительными массами. Колебания маятника происходят вокруг горизонтальной оси, проходящей через ребро одной из призм.

В процессе подготовки и выполнения задачи необходимо изучить устройство оборотного маятника, а также освоить теоретические вопросы, связанные с вращательным и колебательным движениями твёрдого тела (момент инерции, теорема о параллельных осях, основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела – уравнение моментов).

Теоретическое введение

Физический маятник. Простейший физический маятник представляет собой твердое тело, которое может вращаться или колебаться относительно горизонтальной оси O_1, не проходящей через его центр тяжести (центр масс) (рис. 1). Колебания маятника являются частным случаем вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси и описываются основным уравнением вращательного движения – уравнением моментов. В проекции на ось вращения $0z$, перпендикулярную к плоскости чертежа, уравнение имеет вид:

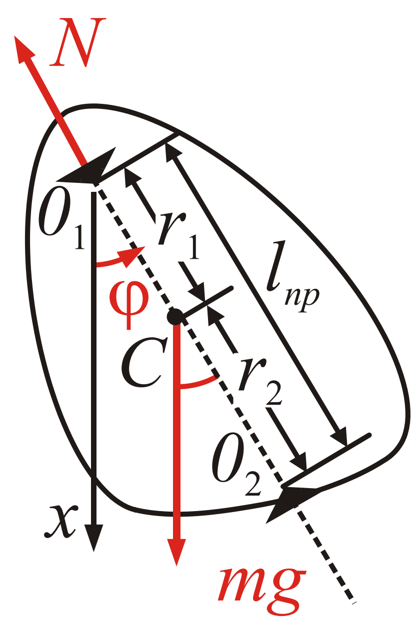

Рис. 1. Физический маятник: C – центр масс, O_1 и O_2 – сопряженные точки подвеса.

$$I\beta_z = \sum_i M_{(i)z} \qquad (1)$$

Здесь I и $\Sigma_i\, M_{(i)z}$ - момент инерции маятника относительно оси $0z$ и сумма проекций моментов сил на эту ось, $\varphi = \varphi(t)$ − угол отклонения маятника от положения равновесия в момент времени t, $\beta_z = d^2\varphi/dt^2$ – угловое ускорение. Положительные направления для оси $0z$ (на нас) и для отсчета угла φ (против часовой стрелки) согласованы правилом буравчика. Момент инерции I твердого тела это аддитивная величина, по определению равная сумме малых моментов инерции $dI_i = dm_i r_i^2$ отдельных элементов тела dm_i, принимаемых за материальные точки $I = \Sigma_i dI_i$, где r_i – расстояние элемента до оси вращения. Момент инерции характеризует распределение массы тела относительно оси вращения и, как видно из уравнения (1), является мерой инертности при вращательном движении (аналогично массе тела при поступательном движении).

Суммарный момент сил сведется к моменту силы тяжести mg, приложенной к центру тяжести C: $\boldsymbol{M}_z = [\boldsymbol{r}, m\boldsymbol{g}]$, а его проекция на ось определяется формулой

$$M_z = -mgr\sin\varphi \qquad (2)$$

Знак минус учитывает, что при угле отклонения $\varphi > 0$ момент силы тяжести направлен против оси $0z$ и противодействует увеличению угла. Момент N силы реакции оси равен нулю, так как равно нулю ее плечо (сила направлена радиально от оси вращения), а всеми силами трения пренебрегаем. Для случая малых углов φ отклонения от положения равновесия можно считать $\sin\varphi \approx \varphi$ и уравнение (1) принимает более простой вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{mgr}{I}\varphi \qquad (3)$$

Уравнение (3) для функции $\varphi(t)$ представляет собой уравнение гармонического осциллятора, а его общим решением, как легко показать простой подстановкой в (3), является функция $\varphi(t) = A\sin(\omega_0 t + \alpha)$, где собственная круговая частота маятника определяется формулой

$$\omega_0^2 = \frac{mgr}{I} \qquad (4)$$

Таким образом, малые колебания физического маятника являются гармоническими, а их частота зависит от массы m маятника, его момента инерции I относительно оси вращения и от расстояния r между осью вращения и центром тяжести маятника. Амплитуда A и начальная фаза α определяются из начальных условий, т. е. значений угла φ и угловой скорости $\Omega = d\varphi/dt$ в начальный момент времени $\varphi(0) = \varphi_0$ и $\Omega(0) = \Omega_0$. В эксперименте чаще измеряется период колебаний T, который связан с круговой частотой соотношением

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgr}} \qquad (5)$$

Математический маятник. Частным случаем физического маятника является математический маятник - тело массы m, подвешенное на невесомой нерастяжимой нити длины l, если размеры тела пренебрежимо малы по сравнению с длиной нити. Для малых колебаний в вертикальной плоскости момент инерции математического маятника, как для материальной точки равен $I = ml^2$. Подставляя в формулу (4) это выражение для момента инерции и $r = l$, получаем формулу для круговой частоты колебаний математического маятника:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad (6)$$

Всякому физическому маятнику можно сопоставить математический маятник, имеющий одинаковую с ним круговую частоту собственных колебаний ω_0. Длина нити $l_{пр}$ такого математического маятника называется приведенной длиной физического маятника

$$l_{np} = \frac{g}{\omega_0^2} \qquad (7)$$

Оборотный маятник. Выясним, как располагаются параллельные друг другу оси, относительно которых физический маятник совершает собственные колебания с одной и той же круговой частотой ω_0. Момент инерции маятника I в формуле (4) по теореме Гюйгенса-Штейнера о параллельных осях можно выразить через его момент инерции I_0 относительно оси, проходящей через центр масс $I = I_0 + mr^2$, где r – расстояние оси от центра масс C маятника. Тогда $\omega_0{}^2 = mgr/(I_0 + mr^2)$, откуда после простых преобразований получаем квадратное уравнение для определения расстояния r от искомых осей до центра масс маятника:

$$r^2 - \frac{g}{\omega_0^2} r + \frac{I_0}{m} = 0, \qquad (8)$$

в котором коэффициент при первой степени r с обратным знаком является приведенной длиной физического маятника (7). По теореме Виета он равен сумме корней r_1 и r_2 квадратного уравнения (8). Следовательно, существуют два значения расстояния r от центра тяжести до оси вращения (и множество параллельных осей), при которых частота колебаний маятника равна ω_0, если, конечно, при данных значениях I_0, m и ω_0 корни r_1 и r_2 окажутся вещественными.

Маятник, у которого реализованы две оси вращения, соответствующие одинаковой частоте колебаний ω_0 и лежащие в одной плоскости с центром масс по разные стороны от него (точки O_1 и O_2 на рис. 1), называется *оборотным*. Точка O_2, лежащая на прямой O_1C на расстоянии $l_{\text{пр}}$ от точки подвеса O_1, называется *центром качаний*. Точка подвеса O_1 и соответствующий ей центр качаний O_2 - взаимно обратимые, или сопряженные точки маятника. При переходе от одной из сопряженных осей к другой, сопровождаемом оборотом маятника на 180°, частота колебаний остается той же $\omega_0^2=g/l$, где $l = l_{np}$ – расстояние между осями, равное приведенной длине оборотного маятника.

Формула (7) лежит в основе устройства “классического” оборотного маятника, служащего для прецизионных измерений ускорения свободного падения g. Он представляет собой массивный стержень с двумя призмами, одну из которых (пренебрежимо малой массы) можно перемещать вдоль стержня (рис. 1), добиваясь такого ее положения, при котором частоты собственных колебаний маятника при опоре на ту и другую призму будут одинаковы. Положение центра масс и момента силы тяжести у такого маятника не меняются в силу пренебрежимо малой массы призмы. Измеряя круговую частоту ω_0 (или на эксперименте период T) и расстояние между опорными ребрами призм, равное $l = l_{np}$, по формуле (7) вычисляют g. Таким образом, формула для частоты ω_0 колебаний оборотного маятника включает только значения l и g, и в отличие от физического маятника (формула (4)), не содержит величин момента инерции I и расстояния до центра масс r. Это замечательное свойство оборотного маятника используется для точного измерения абсолютного значения ускорения силы тяжести.

Маятник, изучаемый в настоящей задаче, имеет более сложную конструкцию (рис. 2). Он состоит из длинного стержня, на котором расположены две малые *неподвижные призмы*, (на рис. зачерчены) и две массивные чечевицы. Маятник может совершать колебания, опираясь опорными ребрами призм (оси O_1 и O_2 на рис. 2) на неподвижную подставку. Красная чечевица закреплена на стержне, а синюю можно перемещать вдоль стрежня и фиксировать в нужном положении (более подробно маятник описан в разделе “Экспериментальная установка”). При произвольном положении подвижной чечевицы на стержне маятника периоды колебаний относительно осей O_1 и O_2 различны, т. е. маятник не является оборотным. Изменяя ее положение, можно добиться, чтобы периоды колебаний на обеих призмах были одинаковы. В этом случае маятник становится оборотным и справедливо приведенное выше рассмотрение для “классического” оборотного маятника.

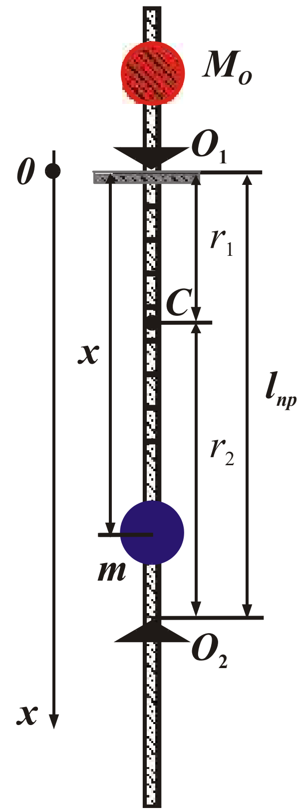

Рис. 2. Оборотный маятник с подвижной чечевицей (обозначения см. в тексте).

$$r_1 + r_2 = l_{пр} = \frac{g}{\omega_0^2} \qquad (9)$$

Из конструкции маятника (рис. 2) видно, что сумма расстояний $r_1 + r_2$ для любого положения подвижной чечевицы равна l.

Использование оборотного маятника для измерения ускорения свободного падения. Измерение периода колебаний любого физического маятника позволяет, как отмечалось, определить ускорение свободного падения по формуле (4). Для оборотного маятника удается исключить из окончательной формулы (7) величину момента инерции маятника, и таким образом, увеличить точность определения абсолютного значения g.

Идея эксперимента состоит в следующем. При изменении положения подвижной синей чечевицы изменяется положение центра масс маятника и его момент инерции, и следовательно частота (или период) колебаний (более подробно см. в Приложении). Изменяя положение подвижной чечевицы снимают зависимости периода колебаний T_1 (x) и T_2 (x) маятника, подвешенного на неподвижных осях O_1 и O_2. На этих зависимостях находят положения чечевицы x_0, при котором периоды совпадают $T_1(x_0) = T_2(x_0) = T_0$ и маятник является оборотным. Тогда из формулы (8) при $T_1 = T_2 = T_0$ можно записать:

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T_0^2} \qquad (10)$$

Формула (10) используется в дальнейшем для расчета ускорения свободного падения.

Экспериментальная установка

В данной работе в качестве маятника используется *стержень* 1 с двумя неподвижными *опорными призмами* 2, 3 (тонкие металлические стержни) и *двумя дополнительными массами* (чечевицами) 4, 5 (рис. 3). Красная чечевица (4) закреплена, а синяя чечевица (5) находится между призмами и может перемещаться по стержню (ее положение определяется по шкале на нем, шаг шкалы равен 25 мм). Расстояние между призмами l = 800 мм.

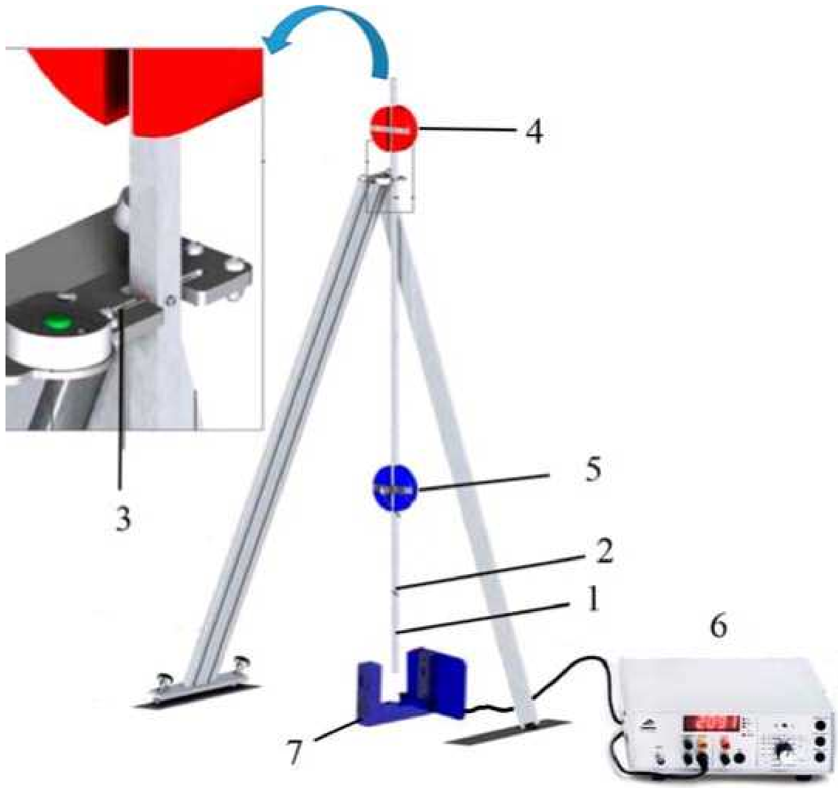

Рис. 3. Экспериментальная установка

Период колебаний определяется с помощью *электронного счетчика* 6 и *фотодатчика* 7. Значение периода колебаний высвечивается на табло электронного счетчика.

Проведение эксперимента

При проведении эксперимента следует убедиться, что:

- призма маятника попала ребром в «канавку» опорной плоскости и опирается на нее по всей длине (см. вставку на рис. 3);
- в процессе колебаний стержень не задевает опору маятника.

Упражнение 1. Определение ускорения свободного падения с помощью оборотного маятника.

Измерения

1. Подвесьте маятник так, чтобы красная чечевица (4) находилась сверху, а синяя (5) снизу (прямое положение маятника, период T_1). Закрепите синюю чечевицу в положении, наиболее близком к точке подвеса.

2. Отклоните маятник от положения равновесия на 3 - 5° (нижний конец стержня - на 3 - 5 см от вертикали) и с помощью электронного счетчика измерьте период колебаний. Запишите данные в табл.

3. Изменяя положение подвижной синей чечевицы (смещая ее вниз с шагом 25 мм), повторите измерения по п. 2. Результаты внесите в табл. Измерения проведите не менее чем для 25 положений чечевицы.

4. Переверните маятник и подвесьте его так, чтобы подвижная синяя чечевица находилась сверху, а красная снизу (обратное положение маятника, период T_2). Повторите измерения в соответствии с пп. 2 - 3. Результаты измерений также занесите в табл.

Таблица

Значения периодов колебаний маятника для различных положений чечевицы

Положение чечевицы, N	T, с	
	T_1, с (прямое положение)	T_2, с (обратное положение)
1		
2		
3		
4		
...		

Обработка результатов

1. Постройте графики зависимости периодов T_1 и T_2 от положения N синей чечевицы для прямого и обратного положения маятника.

2. По графику определите точки пересечения кривых $T_1(N)$ и $T_2(N)$. Периоды колебаний T_1 и T_2 для прямого и обратного положений маятника будут одинаковыми в случае, когда приведенная длина равна расстоянию между точками подвеса (в нашем случае $l_{пр} = l = 800$ мм).

4. Используя значения $T_0 = T_1 = T_2$ и l, вычислите g по формуле (10).

5. Сравните полученное значение g с табличным.

Основные итоги работы

В результате выполнения работы должны быть изучены основные свойства физического маятника; определено значение ускорения свободного падения, проведено его сравнение с табличным значением и проанализированы причины, приводящие к увеличению погрешности эксперимента.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение физического маятника. Математического маятника. От чего зависит период их колебаний?
2. При каких условиях физический маятник совершает гармонические колебания? Каким уравнением они описываются? Что называется амплитудой, периодом, частотой, круговой частотой, фазой колебаний?
3. В каких положениях колеблющегося маятника максимальна его скорость? Ускорение?
4. Дайте определение приведенной длины физического маятника. Напишите формулу для приведенной длины.
5. Что такое центр качания и сопряженные точки физического маятника?
6. Выведите формулу для расчета ускорения свободного падения из периода колебаний оборотного маятника.
7. По каким причинам ускорение свободного падения зависит от высоты над уровнем моря, а также от географической широты?

Приложение

Маятник, изучаемый в настоящей задаче, отличается от “классического” тем, что при изменении положения синей чечевицы изменяется положение его центра масс и моментов инерции для неизменных осей O_1 и O_2 (рис. 2, 3). Поведение этого маятника определяется следующими параметрами: массой M_o и моментом инерции I_o остова относительно его центра масс, массой m подвижной чечевицы, а также расстоянием l между осями. Параметры установки подобраны так, что существуют две конфигурации маятника с координатами чечевицы x_1 и x_2 (не путать с расстояниями r_1, r_2 осей до центра масс маятника), соответственно, при которых он становится оборотным.

Получим формулу для периода колебаний маятника относительно оси O_1 (прямое положение) для различных положений x чечевицы. Для этого в формуле (5) надо определить расстояние до центра масс $r_C = x_C$ и полный момент инерции маятника I. Ось O_1 маятника проходит практически через центр масс остова маятника, и эта конструктивная особенность маятника существенно упрощает анализ системы. Положение центра масс маятника однозначно определяется положением синей чечевицы по формуле $x_C = mx/(M_o + m)$. Записывая полный момент инерции маятника относительно оси O_1 как сумму моментов инерции остова и подвижной чечевицы и используя теорему о параллельных осях (момент инерции подвижной чечевицы относительно ее центра масс принимается равным нулю, как для материальной точки), получаем $I = I_o + mx^2$. Подставляя значения I, x_C и $M = M_o + m$ в формуле (5)получаем зависимость квадрата периода колебаний маятника $T_1^2(x)$ от положения подвижной чечевицы x в прямом положении маятника:

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2}{g}\left(\frac{I_o}{mx} + x\right), \qquad (П1)$$

Аналогично, записывая полный момент инерции маятника относительно оси O_2 как сумму моментов инерции остова и подвижной чечевицы и используя теорему о параллельных осях получаем формулу для квадрата периода колебаний маятника $T_2^2(x)$ в зависимости от положения подвижной чечевицы x в оборотном положении:

$$T_2^2 = \frac{4\pi^2}{g}\left[\frac{I_o + l^2 M_o \delta_m}{m(x_o - x)} - x - x_{oo}\right], \qquad (П2)$$

где введены обозначения $\delta_m = (m + M_o)/m)$, $x_o = l\,\delta_m$, $x_{oo} = l\,(M_o - m)/m$

Зависимости $T_1(x)$ и $T_2(x)$, рассчитанные по формулам (П1, П2), приведены на рис. 4. Именно эти зависимости снимаются на эксперименте.

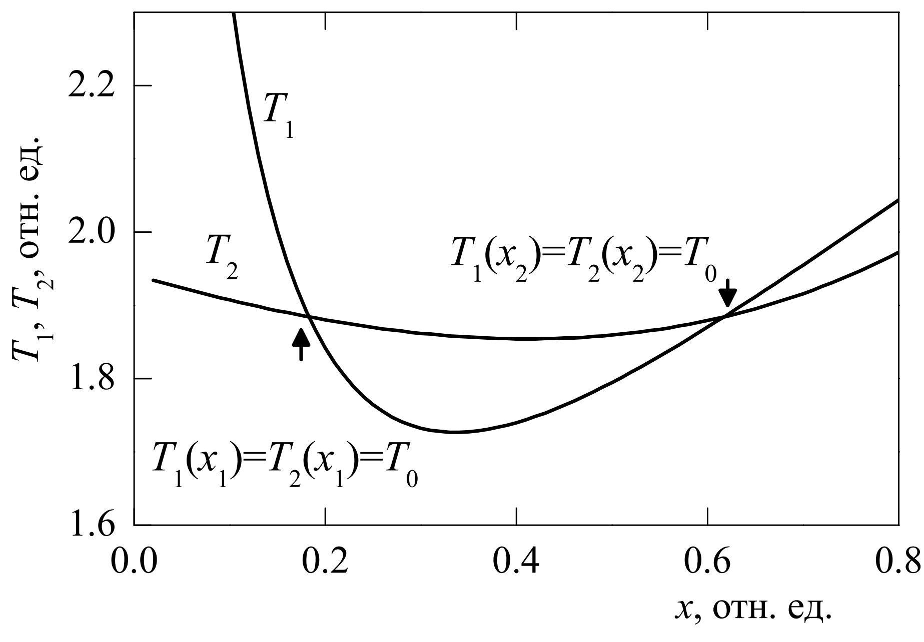

Рис. 4. Зависимости периодов колебаний $T_1(x)$ и $T_2(x)$ от положения чечевицы для прямого и оборотного положения маятника

Из формулы (П1) видно, что зависимость $T_1(x)$ стремится к бесконечности при $x \to 0$, что соответствует безразличному равновесию маятника для оси, проходящей через центр масс. Зависимость $T_1(x)$ имеет минимум при $x_{min1}^2 = I_o/m$, который определяется, как обычно, из условия $dT_1(x)/dx = 0$ (или $dT_1^2(x)/dx$). Минимум на зависимость $T_2(x)$ при x_{min2} менее выражен, а точка x_o, где период T_2 стремится к бесконечности $x_o = l\ \delta_m > l$ ($\delta_m > 1$) находится вне диапазона изменений положений подвижной чечевицы. Приравнивая $T_1^2(x)$ и $T_2^2(x)$, получаем квадратное уравнение для определения двух положения подвижной чечевицы x_1 и x_2, при котором маятник становится оборотным. При этом для обоих положений периоды $T_1(x_1) = T_2\ (x_1) = T_0$ и $T_1\ (x_2) = T_2\ (x_2) = T_0$, так как в обоих случаях период определяется формулой (10) и зависят только от неизменного расстояния l между осями.

Литература

1 Белов Д. В. "Механика", изд. Физический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова 1998,

Глава IV. Движение абсолютно твердого тела.

§ 19. Вращательное движение тела относительно оси.

Глава VIII. Механические колебания,

§ 34. Общее представление о колебаниях.

§ 36. Свободные гармонические колебания.

2. Савельев И. В. "Курс общей физики", учебное пособие в 5-и книгах, 1998 г. Книга 1. Механика.

Глава 5. Механика твердого тела.

§ 5.3. Вращение тела вокруг неподвижной оси.

§ 5.4 Момент инерции,

Глава 8. Колебательное движение.

§ 8.1. Общие сведения о колебаниях.

§ 8.4. Гармонические колебания.

§ 8.5. Маятник.

3. сайт кафедры: http://ferro.phys.msu.ru/prak/tasks