МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.Ломоносова

Физический факультет
кафедра общей физики и физики конденсированного состояния

Методическая разработка
по общему физическому практикуму

Задача № 311

Расчёт напряжённости и потенциала электростатического поля двух точечных зарядов

Составитель -- доцент А. Е. Богданов

Москва -- 2023

Целью настоящей задачи является изучение стационарной картины электрического поля, созданного двумя неподвижными точечными зарядами. Для сдачи работы нужно выполнить несколько теоретических заданий, вариант которых можно получить у преподавателя. Один из возможных вариантов приведён в конце данного описания.

В методической разработке сохранены обозначения физических величин, использованные в учебном пособии Д. В. Белова «Электромагнетизм и волновая оптика» [1].

§ 1. Взаимодействие двух неподвижных точечных зарядов

1.1. Закон Кулона в скалярной форме. Рассмотрим два неподвижных точечных заряда, расположенных в точках 1 и 2 (рис. 1). Эти заряды окружены однородной безграничной диэлектрической средой и закреплены в этих точках, например, с помощью непроводящих стержней. Такие заряды также можно называть сосредоточенными. Модуль силы F_{12}, действующей на заряд q_2 со стороны заряда q_1 (точнее: со стороны электрического поля заряда q_1), выражается законом Кулона. В скалярной форме этот закон имеет вид:

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{|q_1|*|q_2|}{r_{12}^2}. \qquad (1.1)$$

r_{12} – расстояние между зарядами, $\varepsilon_0 \approx 8.85*10^{-12}$ Ф/м (фарад на метр) – электрическая постоянная, которую следует отличать от относительной диэлектрической проницаемости ε. Электрическая постоянная ε_0 вводится в системе СИ и имеет соответствующую размерность. Относительная диэлектрическая проницаемость ε характеризует свойства диэлектриков и является безразмерной величиной. Она всегда больше единицы и показывает, во сколько раз сила взаимодействия между зарядами уменьшается в диэлектрической среде по сравнению с вакуумом, для которого $\varepsilon = 1$. Если заряды находятся в воздухе, то значение диэлектрической проницаемости также можно считать приближённо равным единице, $\varepsilon \approx 1$. Для удобства записи формул используется коэффициент $k = 1/4\pi\varepsilon_0 \approx 9*10^9$ Н*м^2/Кл^2.

Электрическая сила обратно пропорциональна квадрату расстояния r_{12} между зарядами. Таким же образом зависит от расстояния и гравитационная сила. По форме записи закон Кулона аналогичен закону всемирного тяготения. Принципиальное отличие электрических сил от гравитационных состоит в том, что электрические заряды могут быть как положительными, так и отрицательными, а массы тел -- всегда положительные величины. Такой взгляд на электрические и гравитационные силы является общепринятым в курсах общей физики.

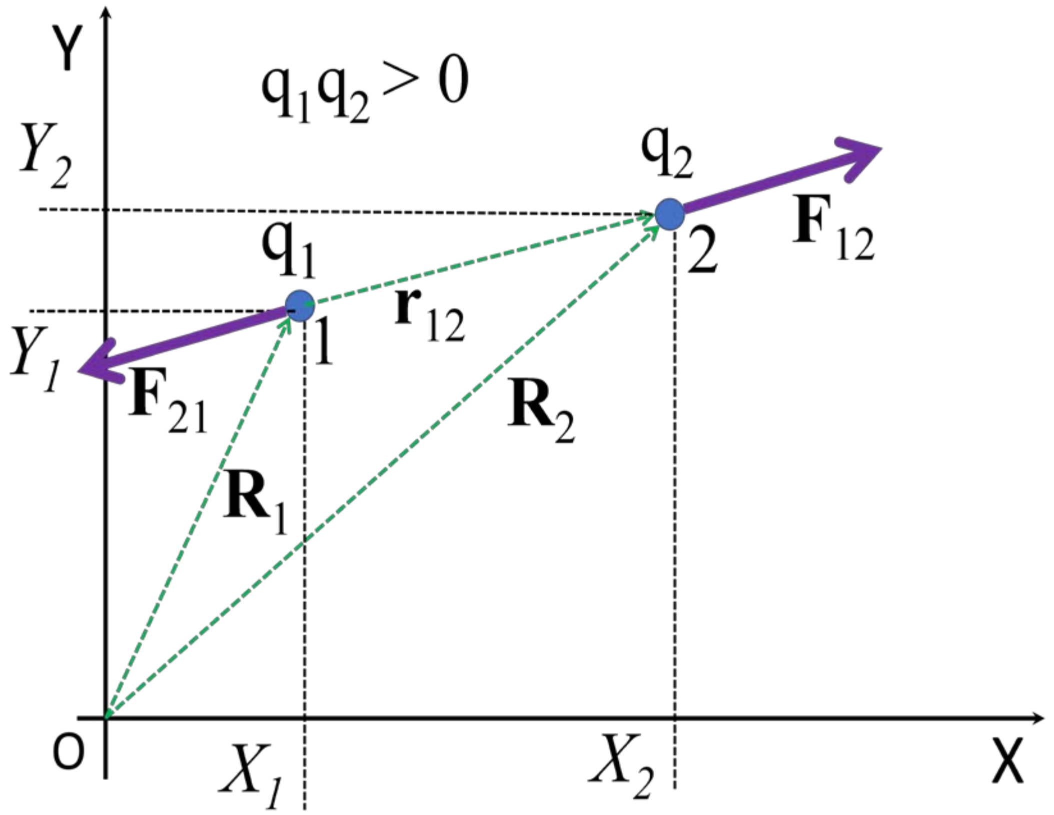


Рисунок 1 -- Радиус-векторы двух точечных зарядов и векторы сил их взаимодействия

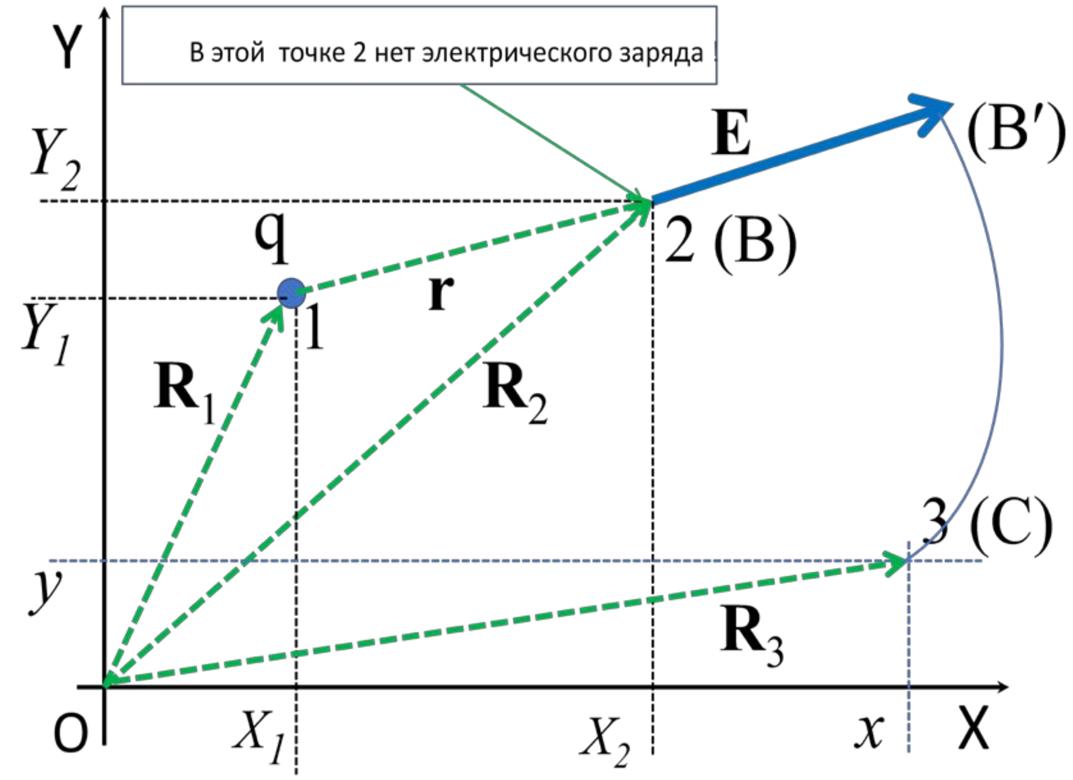


Рисунок 2 -- Точечный заряд q и вектор напряжённости поля, созданного этим зарядом в точке 2 (B)

1.2. Закон Кулона в векторной форме. Закон Кулона можно записать в векторной форме, используя вектор силы $\mathbf{F}_{12}$, действующей на второй заряд, и вектор $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$, соединяющий точки 1 и 2 расположения зарядов. Отношение вектора $\mathbf{r}_{12}$ к его модулю r_{12} представляет собой единичный вектор $\mathbf{e}_r$ вдоль направления $\mathbf{r}_{12}$: $\mathbf{e}_r = \mathbf{r}_{12}/r_{12}$, $|\mathbf{e}_r| = 1$. Здесь и далее будем считать, что относительная диэлектрическая проницаемость среды $\varepsilon = 1$.

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\mathbf{e}_r\,. \qquad (1.2)$$

Если заряды q_1, q_2 одного знака, то их произведение – положительная величина, $q_1q_2 > 0$, и вектор силы $\mathbf{F}_{12}$ совпадает по направлению с вектором $\mathbf{r}_{12}$, заряды в этом случае отталкиваются. Если заряды q_1, q_2 имеют разные знаки, положительный и отрицательный, то их произведение меньше нуля, $q_1q_2 < 0$, и вектор силы $\mathbf{F}_{12}$ направлен противоположно $\mathbf{r}_{12}$, заряды притягиваются друг к другу. Формула (1.2) показывает связь между направлением силы и знаком произведения q_1q_2. На первый заряд со стороны второго действует сила $\mathbf{F}_{21}$, направленная противоположно силе $\mathbf{F}_{12}$. Векторы этих сил для случая одноимённых зарядов показаны на рис. 1.

Форма записи закона Кулона (1.2) не зависит от выбора декартовой системы координат. Координаты начала и конца вектора $\mathbf{r}_{12}$ изменятся при переходе к другой системе координат, но абсолютная величина вектора $\mathbf{r}_{12}$ останется постоянной.

Выражение (1.2) для силы взаимодействия зарядов вместе с принципом суперпозиции определяет все законы электростатики. Как отмечает Р. Фейнман [2]: «Это есть всё, что имеется в электростатике. Если добавить к закону Кулона принцип наложения, то больше ничего в ней не останется. Точно к таким же выводам, ни больше, ни меньше, приведут уравнения электростатики…».

§ 2. Напряжённость электростатического поля одного точечного заряда

2.1. Для описания электростатического поля используются:

1) векторная величина **E** – напряжённость поля, его силовая характеристика;

2) скалярная величина φ – потенциал поля.

В задачах электростатики мы имеем дело со статичной картиной поля. Описание картины этого поля сводится к тому, что в каждой точке пространства с координатами *x, y, z* задаётся вектор напряжённости поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z)$ и скалярный потенциал $\varphi = \varphi(x, y, z)$. Независимость этих величин от времени ($\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$) облегчает задачу, так как переменные поля порождают различные сложные эффекты; они рассматриваются в других разделах электромагнетизма.

2.2. Введём вектор E напряжённости для частного случая электростатического поля одного точечного заряда. Для этого уберём заряд q_2 из точки 2 на рис. 1 и будем рассматривать электрическое поле в этой точке, создаваемое первым зарядом q_1. Так как теперь он единственный, то индекс в его обозначении опускаем, $q_1 = q$. Это может быть, например, заряженный металлический шарик достаточно малых размеров. Обозначим буквой без индекса **r** вектор, соединяющий точку расположения заряда q и некоторую точку наблюдения 2 (она также обозначена как точка В на рис. 2, дополнительные буквенные обозначения точек соответствуют рис. 14 пособия [1]).

Отличие картины рис. 2 от рис. 1 состоит в том, что теперь в точке 2 (В) нет электрического заряда, создающего поле в окружающем пространстве. В эту точку можно поместить пробный заряд q_0 и рассмотреть силу $\mathbf{F}_0$, которая действует на него со стороны поля заряда q. В законе Кулона (1.2) величины зарядов q_1, q_2 ничем не ограничены, они могут быть сколь угодно большими, и создаваемые ими поля будут сильно искажать окружающее пространство. Положительный пробный заряд q_0 играет роль датчика поля. Он является точечным (сосредоточенным) зарядом и настолько мал по абсолютной величине, что его влиянием на внешнее поле и на расположение зарядов системы можно пренебречь, $q_0 << q_i$ (i = 1, 2, …). Сила $\mathbf{F}_0$ также будет определяться по закону Кулона (1.2) для взаимодействия двух точечных зарядов. Запишем выражение для этой силы в соответствии с рис. 2. Обозначим:

1) $\mathbf{R}_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$ -- радиус-вектор точки расположения заряда q. Координату Z_1 положим равной нулю, $Z_1 = 0$, заряд q находится в плоскости чертежа XOY. Величину заряда q считаем известной, в общем случае она может быть как положительной, $q > 0$, так и отрицательной, $q < 0$.

2) $\mathbf{R}_2 = (X_2, Y_2, 0)$ -- радиус-вектор точки наблюдения 2 (В).

3) **r** -- вектор, соединяющий точечный заряд q и точку 2 (В).

Три вектора согласно правилу треугольника сложения векторов удовлетворяют соотношению:

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{r} = \mathbf{R}_2. \qquad (2.1)$$

Тогда вектор **r** равен разности векторов $\mathbf{R}_2$ и $\mathbf{R}_1$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1. \qquad (2.2)$$

Если в точку В поместить пробный заряд q_0, то на него со стороны поля заряда q будет действовать сила $\mathbf{F}_0$. Эта сила выражается законом Кулона (1.2), в котором надо положить $q_1 = q$, $q_2 = q_0$, $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}$:

$$\mathbf{F}_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} = k\frac{qq_0}{r^2}\mathbf{e}_r\,. \qquad (2.3)$$

Напряжённость **E** поля в точке 2 (В) определим как отношение силы $\mathbf{F}_0$ к величине пробного заряда q_0:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_0}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{1}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} = k\frac{q}{r^2}\mathbf{e}_r\,. \qquad (2.4)$$

Напряжённость оказывается не зависящей от величины пробного заряда и определяется только величиной заряда q и вектором $\mathbf{r}$. Модуль напряжённости зависит от квадрата расстояния до точки наблюдения:

$$|\mathbf{E}| = E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{r^2}. \qquad (2.5)$$

Этими выражениями (2.4, 2.5) мы будем пользоваться в дальнейшем, когда речь идёт о напряжённости поля точечного заряда. В задачах электростатики важно правильно строить вектора напряжённости, создаваемые всеми зарядами системы, и применять принцип суперпозиции.

Вектор **E** лежит на прямой, соединяющей точечный заряд q в точке 1 и точку 2 (B). Возможны два направления вектора **E** в зависимости от знака заряда q. Если заряд q положительный, то вектор **E** направлен от заряда к бесконечно удалённой точке, как показано на рис. 2. Если заряд q отрицательный, то вектор напряжённости направлен в противоположном направлении, к заряду q. Так как точка B выбрана произвольно, то выражение (2.4) задаёт правило, по которому в любой точке пространства может быть задан вектор напряжённости. Тем самым мы однозначно определяем векторное, или силовое поле в области вокруг заряда.

Из формул (2.4), (2.5) ясно, что напряжённость поля будет относительно большой вблизи заряда и убывает по величине пропорционально $1/r^2$ при увеличении расстояния до точки. Важно отличать роль зарядов q и q_0: на рис. 2 заряд q создаёт поле, а заряд q_0, который может быть помещён в точку B, служит для определения физических характеристик этого поля в этой точке.

Нетрудно записать выражения для проекций напряжённости поля в точке B. Вектор **r** имеет проекции $x = X_2 - X_1$, $y = Y_2 - Y_1$. Используя орты (единичные векторы) **i** и **j** вдоль осей OX, OY, можно записать выражение для вектора **r** следующим образом:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (X_2 - X_1)\mathbf{i} + (Y_2 - Y_1)\mathbf{j}, \qquad (2.6)$$

где $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$. Модуль r этого вектора равен:

$$r = \left((X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2\right)^{1/2}. \qquad (2.7)$$

Подставив выражения (2.6), (2.7) в (2.4), для вектора напряжённости **E** получим:

$$\mathbf{E} = E_x\mathbf{i} + E_y\mathbf{j} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(X_2 - X_1)}{\left((X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2\right)^{3/2}}\mathbf{i} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(Y_2 - Y_1)}{\left((X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2\right)^{3/2}}\mathbf{j},$$

или

$$\mathbf{E} = k\frac{q}{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}\mathbf{e}_r. \qquad (2.8)$$

Его проекции на оси координат:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q(X_2 - X_1)}{\left((X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2\right)^{3/2}},$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q(Y_2 - Y_1)}{\left((X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2\right)^{3/2}}. \tag{2.9}$$

§ 3. Напряжённость электрического поля в общем случае

Можно обобщить определение вектора напряжённости, введённое в предыдущем параграфе, для любой картины поля, созданного некоторой системой заряженных тел (см. [1], стр. 10). Так же поместим в некоторую точку с координатами *x, y, z* области, где существует электрическое поле, пробный заряд q_0. Силу, действующую со стороны поля на пробный заряд, обозначим $\mathbf{F}_0$. Напряжённость **E** поля в точке *x, y, z* равна отношению силы $\mathbf{F}_0$ к величине пробного заряда q_0:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{F}_0/q_0. \tag{3.1}$$

Последнее выражение определяет напряжённость поля в общем случае как векторную величину и справедливо для поля, созданного любой системой неподвижных точечных зарядов или заряженных тел. Отношение $\mathbf{F}_0/q_0$ в правой части не зависит от величины заряда q_0, так как сила $\mathbf{F}_0$ пропорциональна q_0. Если вектор напряжённости одинаков для всех точек области, то такое поле называется однородным. Однородное электрическое поле возникает, например, между пластинами заряженного плоского конденсатора.

§ 4. Потенциал электростатического поля одного точечного заряда

4.1. Работа электростатических сил при перемещении заряда. Для вычисления потенциала поля, созданного точечным зарядом *q*, сначала вычислим работу A_{BC} электростатической силы, действующей со стороны этого поля на другой точечный положительный заряд при перемещении последнего из точки B в точку C (см. рис. 2). Вычисления проведём для частного случая перемещения пробного заряда q_0 (см. **§** 3 пособия [1]).

По определению, элементарная работа силы $\mathbf{F}_0$ на малом перемещении $d\mathbf{l}$ равна:

$$\delta A = \mathbf{F}_0 d\mathbf{l} = F_0 dl \cos\alpha \quad . \tag{4.1}$$

Силу $\mathbf{F}_0$ запишем с учётом определения напряжённости поля. Для любого положения пробного заряда:

$$\mathbf{F_0} = q_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = q_0 \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{4.2}$$

Траектория пробного заряда при его перемещении из точки В в точку С состоит из двух частей:

1) отрезка ВВ′ прямой, проходящей через заряд q, точку 2 (В), а также точку В′;

2) дуги окружности В′С. Радиус этой окружности равен расстоянию от точки В′ (или от точки С) до заряда q.

Малое перемещение d**l** равно приращению вектора **r**: d**l** = d**r**. Тогда для элементарной работы δA можно записать:

$$\delta A = q_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = q_0 \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r} d\mathbf{r}}{r}. \tag{4.3}$$

Для участка ВВ′ угол α между вектором **r** и его приращением d**r** равен нулю, поэтому **r**d**r** = $r*dr*cos\alpha$ = rdr. Для того, чтобы найти работу сил поля на участке ВВ′, нужно проинтегрировать выражение (4.3) в пределах от $r = r_B$ до r_C;
$r_B = |\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|$, $r_C = |\mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_1|$. Для упрощения записи пределов интегрирования ставим обозначения точек на концах участка – В и В′.

$$A_{BB'} = \int_B^{B'} q_0 \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r} d\mathbf{r}}{r} = \int_B^{B'} q_0 \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \frac{rdr}{r} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0} \int_B^{B'} \frac{dr}{r^2} =$$
$$= \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_B^{B'} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r_C} - \left(-\frac{1}{r_B}\right)\right) = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_C}\right). \tag{4.4}$$

Для участка В′С угол α между вектором **r** и его приращением d**r** равен 90°, поэтому **r**d**r** = $r*dr*cos\alpha$ = 0. Следовательно, работа сил поля на участке В′С равна нулю, вектор силы перпендикулярен перемещению и работа не совершается.

Полная работа A_{BC} равна:

$$A_{BC} = A_{BB'} + A_{B'C} = A_{BB'} + 0 = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_C}\right). \tag{4.5}$$

Полученное выражение показывает, что работа A_{BC} определяется только положением начальной и конечной точек и не зависит от траектории перемещения пробного заряда из точки В в точку С. Любую траекторию ВС можно представить в виде суммы двух составляющих – радиальной (например, ВВ′) и по дуге окружности (В′С). Перемещение по дуге не даёт вклада в работу. Электростатические силы являются, таким образом, потенциальными силами.

4.2. Потенциальная энергия пробного заряда q_0 и потенциал φ. Пусть точка С находится на таком большом расстоянии от заряда q, что величину $1/r_C$ в формуле (4.5) можно считать равной нулю. В этом случае работа $A_{BC} = A_{B\infty}$ равна потенциальной энергии W_n пробного заряда q_0 в поле заряда q:

$$A_{B\infty} = W_n = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B}\right). \qquad (4.6)$$

Потенциалом φ_B точки B называется отношение потенциальной энергии заряда q_0, помещённого в эту точку, к этому заряду:

$$\varphi_B = \frac{W_n}{q_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_B}. \qquad (4.7)$$

Работа A_{BC} = A_{23} сил поля на конечном перемещении BC заряда q_0 выражается через разность потенциалов $\varphi_B - \varphi_C$ начальной и конечной точек:

$$A_{BC} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_C}\right) = q_0\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_B} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_C}\right) = q_0(\varphi_B - \varphi_C) = q_0(\varphi_2 - \varphi_3). \qquad (4.8)$$

§ 5. Потенциал электрического поля в общем случае

Выражение

$$\varphi(x, y, z) = \frac{W_n(x, y, z)}{q_0} = \int_{x,y,z}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r})d\mathbf{r} \qquad (5.1)$$

.

определяет потенциал φ в некоторой точке наблюдения x, y, z для электрического поля, созданного любой системой зарядов. W_n (x, y, z) – потенциальная энергия пробного заряда q_0, равная работе сил электрического поля по перемещению этого заряда из точки наблюдения x, y, z в бесконечно удалённую точку, которая в общем случая является точкой отсчёта энергии и потенциал которой равен нулю. $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(x, y, z)$ – напряжённость поля в точках траектории пробного заряда при его перемещении. Интеграл в правой части не зависит от формы этой траектории, она может быть любой.

§ 6. Связь напряжённости и потенциала

При рассмотрении картины электрического поля часто удобнее пользоваться именно скалярной величиной – потенциалом. Сложить скалярные величины проще, чем сложить векторные величины. Кроме того, напряжённость и потенциал связаны между собой – вектор напряжённости равен градиенту потенциала с учетом знака «минус». Если задано силовое поле напряжённости $\mathbf{E}(x, y, z)$, то компоненты вектора напряжённости выражаются через частные производные скалярной функции $\varphi(x, y, z)$:

$$\mathbf{E}(x, y,z) = -grad\varphi = -\left(\mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right),$$

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} : E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} ; E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{6.1}$$

См. вывод этого выражения на стр. 25-26 [1].

§ 7. Напряжённость поля двух точечных зарядов

7.1. Рассчитать напряжённость поля двух точечных зарядов сложнее, чем ввести эту величину для поля одного заряда. Это связано с тем, что необходимо складывать векторные величины в виде дробей с разными знаменателями, которые, в свою очередь, выражаются через степенные функции координат.

Пусть два точечных электрических заряда q_1 и q_2 закреплены в точках 1 и 2, d -- расстояние между этими неподвижными зарядами. Точки 1 и 2 лежат на оси OX, $d = |\mathbf{R}_1| + |\mathbf{R}_2|$ (рис. 3). Будем считать, что тела, при помощи которых закреплены заряды (например, диэлектрические стержни), не вносят заметного искажения в картину электрического поля в окружающем заряды пространстве. Также будем считать, что относительная диэлектрическая проницаемость среды ε равна единице. В некоторой третьей точке пространства С (точке наблюдения 3), координаты которой обозначим строчными буквами (x, y), напряжённость **E** электрического поля равна сумме напряжённостей, создаваемых первым зарядом ($\mathbf{E}_1$) и вторым зарядом ($\mathbf{E}_2$): $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$.

Выпишем выражения для векторов $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ и абсолютных величин r_1, r_2. Равенство нулю координат Y_1 и Y_2 точек расположения зарядов упрощает формулы. В соответствии с рис. 3:

$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$; $\mathbf{R}_1 = X_1\mathbf{i}$; $\mathbf{R}_2 = X_2\mathbf{i}$.

$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \mathbf{R}_1 = (x - X_1)\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (x - X_1, y)$.

$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r} - \mathbf{R}_2 = (x - X_2)\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (x - X_2, y)$.

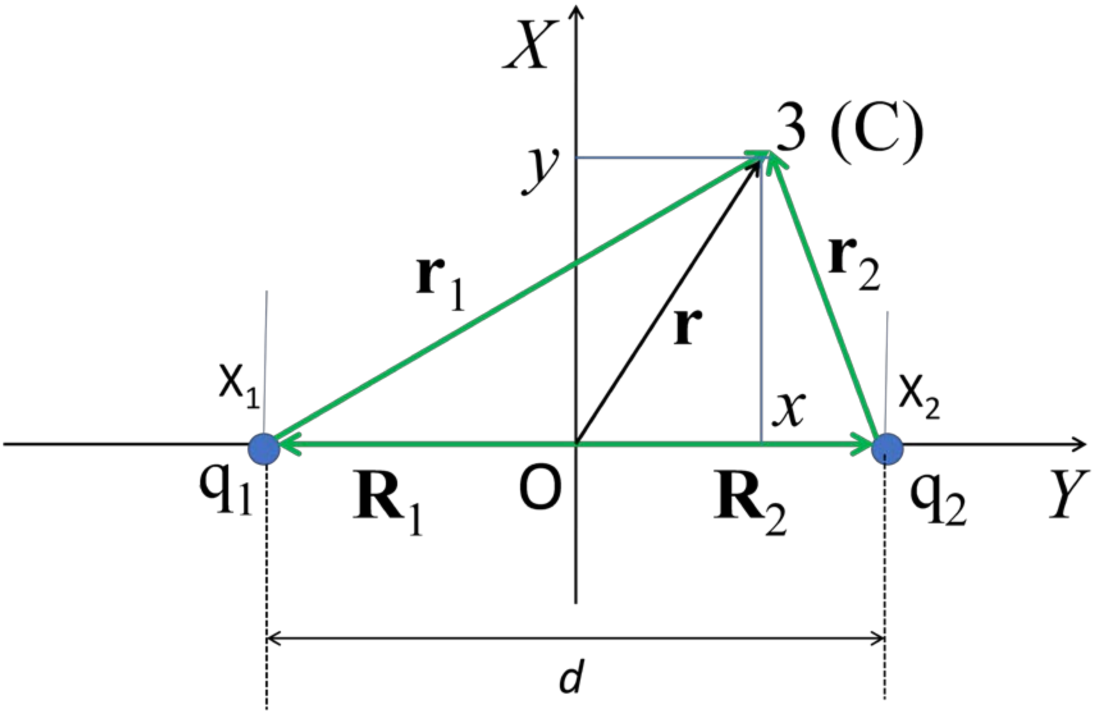
$$r_1 = \left((x - X_1)^2 + y^2\right)^{1/2} .$$
$$r_2 = \left((x - X_2)^2 + y^2\right)^{1/2} . \tag{7.1}$$

Поясним две последние формулы: модуль или длина вектора есть корень квадратный из суммы квадратов его проекций на оси координат.

Записываем выражения для напряжённостей $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ как векторных величин:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1^2}\frac{\mathbf{r}_1}{r_1} = \frac{kq_1}{\left((x - X_1)^2 + y^2\right)^{3/2}}\left((x - X_1)\mathbf{i} + y\mathbf{j}\right),$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2^2}\frac{\mathbf{r}_2}{r_2} = \frac{kq_2}{\left((x - X_2)^2 + y^2\right)^{3/2}}\left((x - X_2)\mathbf{i} + y\mathbf{j}\right). \tag{7.2}$$



$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{r}_1 = \mathbf{r} \qquad\qquad \mathbf{R}_2 + \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$$

Рисунок 3 – Взаимное расположение радиус-векторов зарядов q_1, q_2 и точки наблюдения 3 (С).

Полная напряжённость **E** в точке 3 (С) согласно принципу суперпозиции:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_1^2}\frac{\mathbf{r}_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_2^2}\frac{\mathbf{r}_2}{r_2}. \tag{7.3}$$

Правила сложения векторов хорошо известны: нужно сложить проекции векторов по осям *OX* и *OY*.

$$E_x = E_{1x} + E_{2x},$$
$$E_y = E_{1y} + E_{2y}.$$

Записываем эти суммы:

$$E_x = kq_1\frac{(x - X_1)}{\left((x - X_1)^2 + y^2\right)^{3/2}} + kq_2\frac{(x - X_2)}{\left((x - X_2)^2 + y^2\right)^{3/2}},$$

$$E_y = kq_1\frac{y}{\left((x - X_1)^2 + y^2\right)^{3/2}} + kq_2\frac{y}{\left((x - X_2)^2 + y^2\right)^{3/2}}. \tag{7.4}$$

§ 8. Понятие о силовых линиях электрического поля

Точечные заряды мы обычно показываем на рисунках как относительно малые кружки. Для того, чтобы показать наличие электрического поля вокруг зарядов, рисуют силовые линии. Невозможно нарисовать в каждой точке вектор напряжённости, так как число точек бесконечно большое. Можно провести линию на рисунке таким образом, что касательная к ней будет в любой точке совпадать с вектором напряжённости. Относительное число этих линий, приходящихся на единицу площади, косвенно указывает на величину напряжённости: чем больше линий, тем больше напряжённость.

Примеры силовых линий приведены на рис. 2 стр. 12 пособия [1].

§ 9. Потенциал поля двух точечных зарядов

9.1. Потенциал φ электрического поля в точке C (x, y) на рис. 3 равен сумме вкладов в этот потенциал от зарядов q_1 и q_2: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Запишем соответствующее выражение, используя определение потенциала (5.1). Принцип простого алгебраического сложения вкладов в полный потенциал следует из определения этой величины и принципа суперпозиции для напряжённости поля. Переменные интегрирования будем обозначать штрихом, $\mathbf{r}_1'$ пробегает значения от $\mathbf{r}_1$ до бесконечности; то же $\mathbf{r}_2'$. Вычисления аналогичны тем, которые были проведены при выводе выражения (4.4).

$$\varphi(x, y) = \int_{x,y}^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' = \int_{\mathbf{r}_1}^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r_1'^2} \frac{\mathbf{r}_1' d\mathbf{r}_1'}{r_1'} + \int_{\mathbf{r}_2}^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2}{r_2'^2} \frac{\mathbf{r}_2' d\mathbf{r}_2'}{r_2'} =$$

$$= \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_2} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x - X_1)^2 + y^2}} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x - X_2)^2 + y^2}} = \varphi_1 + \varphi_2 \, . \tag{9.1}$$

9.2. Предположим, что мы рассчитали численное значение потенциала в точке 3 (C). Есть ли другие точки, в которых потенциал имеет такое же значение? Очевидно, да. Определяя все точки с заданным заранее потенциалом φ, мы получим эквипотенциальную поверхность (в литературе есть термины «поверхность уровня», «изоповерхность»). Формула (9.1) в этом случае будет представлять собой уравнение эквипотенциальной поверхности (линии), то есть определять геометрическое место точек пространства с одинаковым потенциалом φ = const. В этом уравнении (x, y) – координаты любой точки (не обязательно точки C на рис. 3), потенциал которой равен φ.

9.3. В общем случае эквипотенциальные поверхности описываются уравнением для потенциала:

$$\varphi(x, y, z) = \text{const}. \tag{9.2}$$

Возьмём дифференциал от левой и правой части этого соотношения:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz = 0 \quad . \qquad (9.3)$$

Элементарные приращения dx, dy, dz – это компоненты вектора d**r,** который принадлежит эквипотенциальной поверхности. Приращение потенциала вдоль изоповерхности равно нулю, и три компоненты этого приращения можно объединить в одни вектор. Частные производные являются компонентами вектора напряжённости поля (см. (6.1)). Правую часть (9.3) можно рассматривать как скалярное произведение векторов d**r** и gradφ. Это произведение равно нулю, следовательно силовая линия в любой точке перпендикулярна эквипотенциальной поверхности.

§ 10. Примеры эквипотенциальных поверхностей поля двух точечных зарядов

10.1. Пусть заряды q_1 и q_2 равны по модулю и противоположны по знаку, q_1 = q > 0, q_2 = - q < 0. Слева на рис. 3 находится положительный заряд, а справа – отрицательный. Пусть далее величина q = 1/9 $*10^{-9}$ Кл = 1/9 нКл, тогда произведение kq = 1 Н*м^2/Кл. Расстояние между зарядами примем равным d = 20 см = 0.2 м, а начало системы координат на рис. 3 расположим точно посередине между зарядами.

X_1 = - 0.1 (м), X_2 = + 0.1 (м). Последнее условие ранее в формулах (7.4), (9.1) не оговаривалось, и они справедливы для любых значений длин векторов $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$. Запишем формулу (9.1) для данного частного случая. При подстановке в её правую часть координат (x, y) некоторой произвольно выбранной точки в левой части получаем значение потенциала в вольтах.

$$\varphi(x, y) = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{(x+0.1)^2 + (y)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-0.1)^2 + (y)^2}} [Вольт] \quad . \qquad (10.1)$$

Мы получили выражение для эквипотенциальной поверхности (в нашем случае точнее сказать – линии) в виде неявной функции (10.1): φ(x, y) = f (x, y) = const. Непосредственно выразить зависимость y = f(x) простым способом невозможно. На рис. 4 построен набор эквипотенциальных линий для этого случая, значения потенциала φ в вольтах равны 0.5, 1, 2, 3, 4, 5, 6 (левая часть рисунка) и тем же значениям со знаком « - » (правая часть рисунка). По осям координат отложены расстояния в метрах, шаг сетки равен 0.1 м. По мере увеличения абсолютного значения потенциала линии располагаются ближе к зарядам. В начале координат O, которое лежит точно посередине между зарядами, потенциал равен нулю. То же можно сказать для любой точки на оси OY – разность двух слагаемых в правой части (10.1) будет равна нулю при любом значении y.

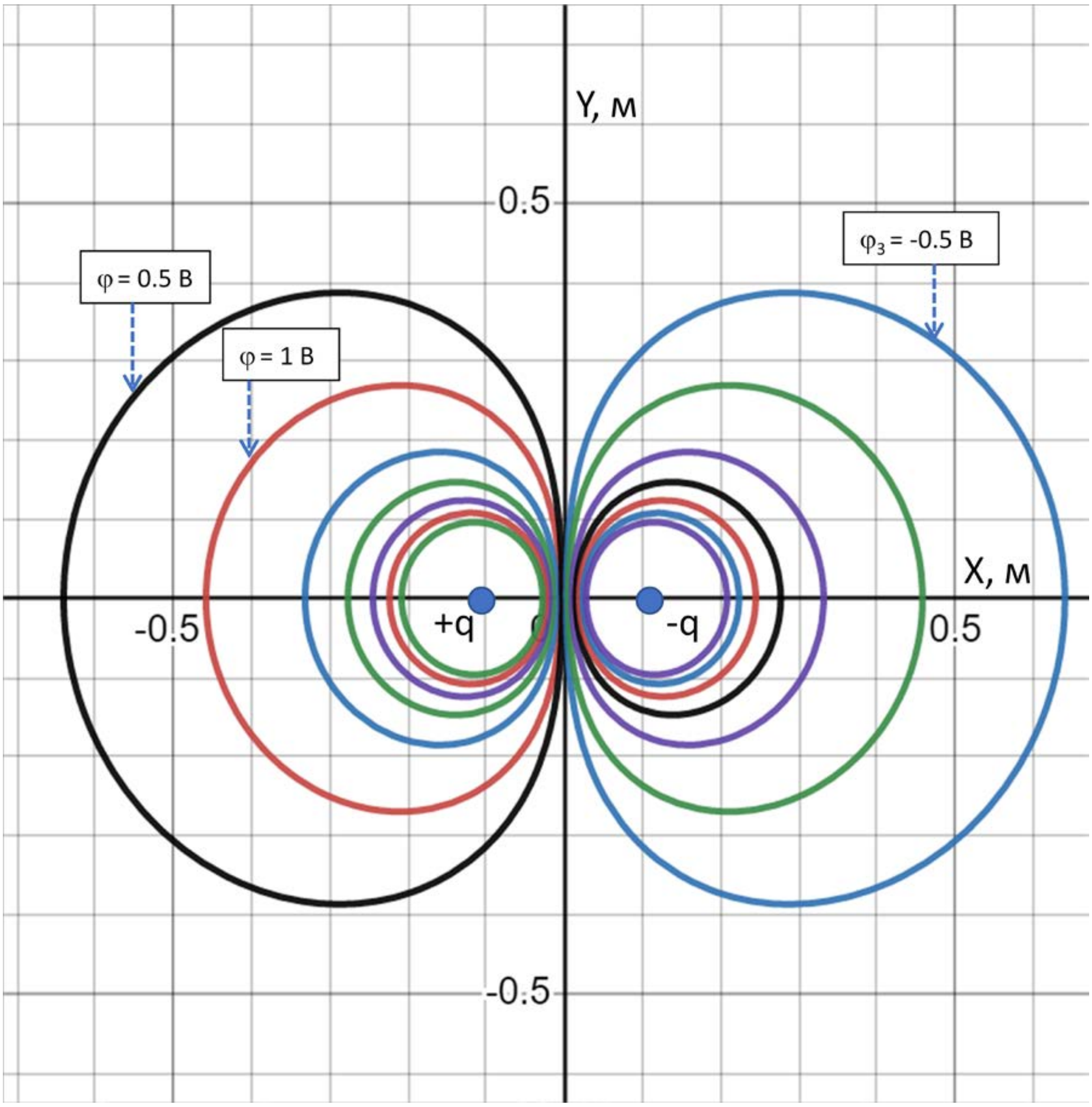


Рисунок 4 – Эквипотенциальные линии электростатического поля двух зарядов разного знака q_1 = +1/9 нКл и q_2 = - 1/9 нКл

Рассмотрение двумерной картины электрического поля одного и двух зарядов на плоскости легко обобщить для трехмерного пространства, введя дополнительно координату *z* в выражение для радиуса-вектора точки наблюдения.

10.2. Можно построить набор эквипотенциальных линий поля, созданного двумя одинаковыми положительными зарядами. Для этого достаточно изменить знак второго слагаемого в (10.1):

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{(x+0.1)^2 + (y)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-0.1)^2 + (y)^2}} \quad . \tag{10.2}$$

На рис. 5 приведены такие линии для значения потенциала в вольтах: 4, 5, 6, 8, 10, 15, 20, 25, 30. По мере увеличения потенциала линии располагаются ближе к зарядам.

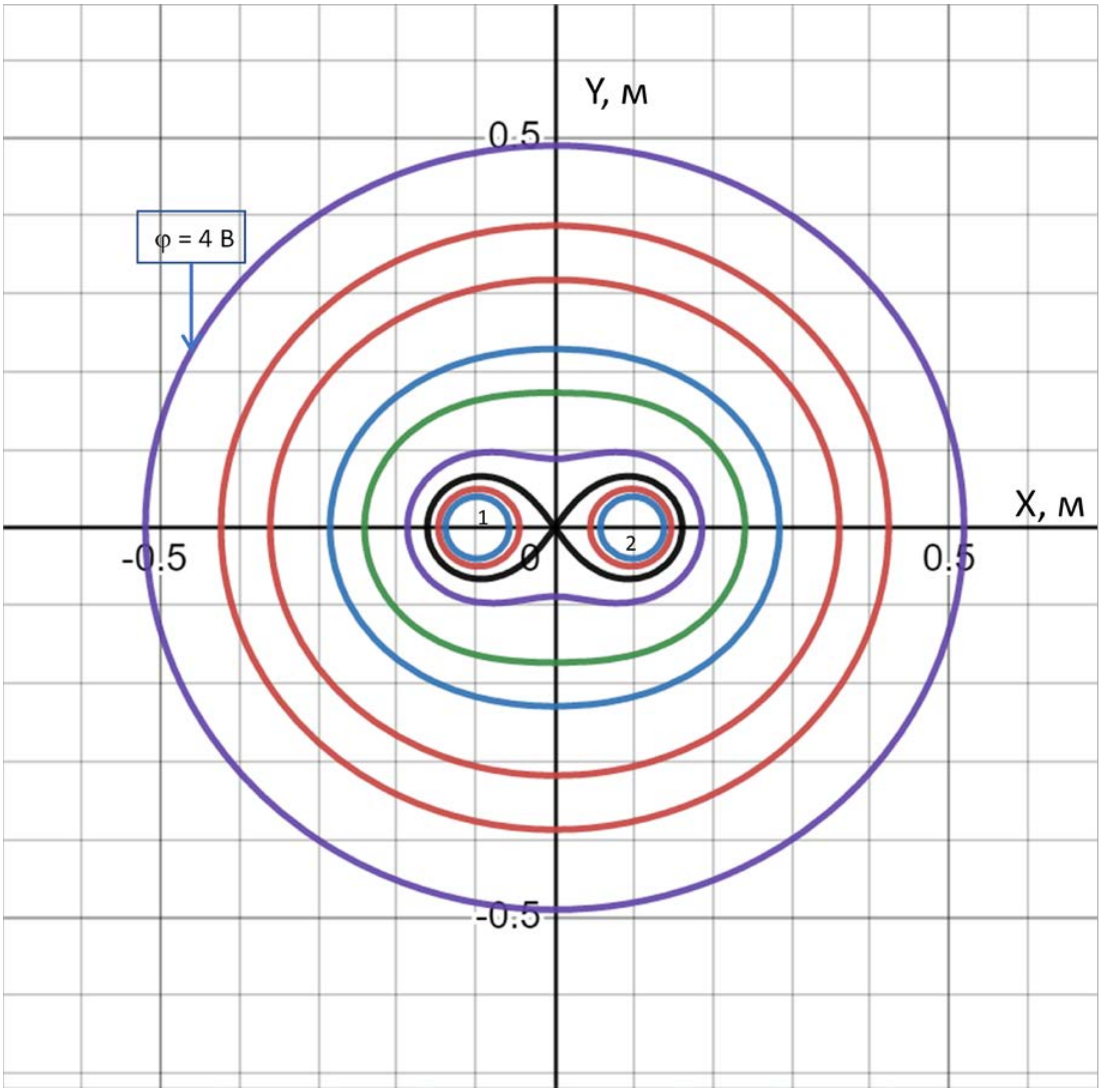


Рисунок 5 – Эквипотенциальные линии электростатического поля двух одинаковых положительных зарядов 1/9 нКл, расположенных в точках 1 и 2.

10.3. Эквипотенциальные линии поля двух зарядов, один из которых (положительный) в два раза больше отрицательного, приведены на рис. 6. Значения потенциала в вольтах: 1, 2, 3, 6, -1, -2, -3 ,-6 ,-0.5.

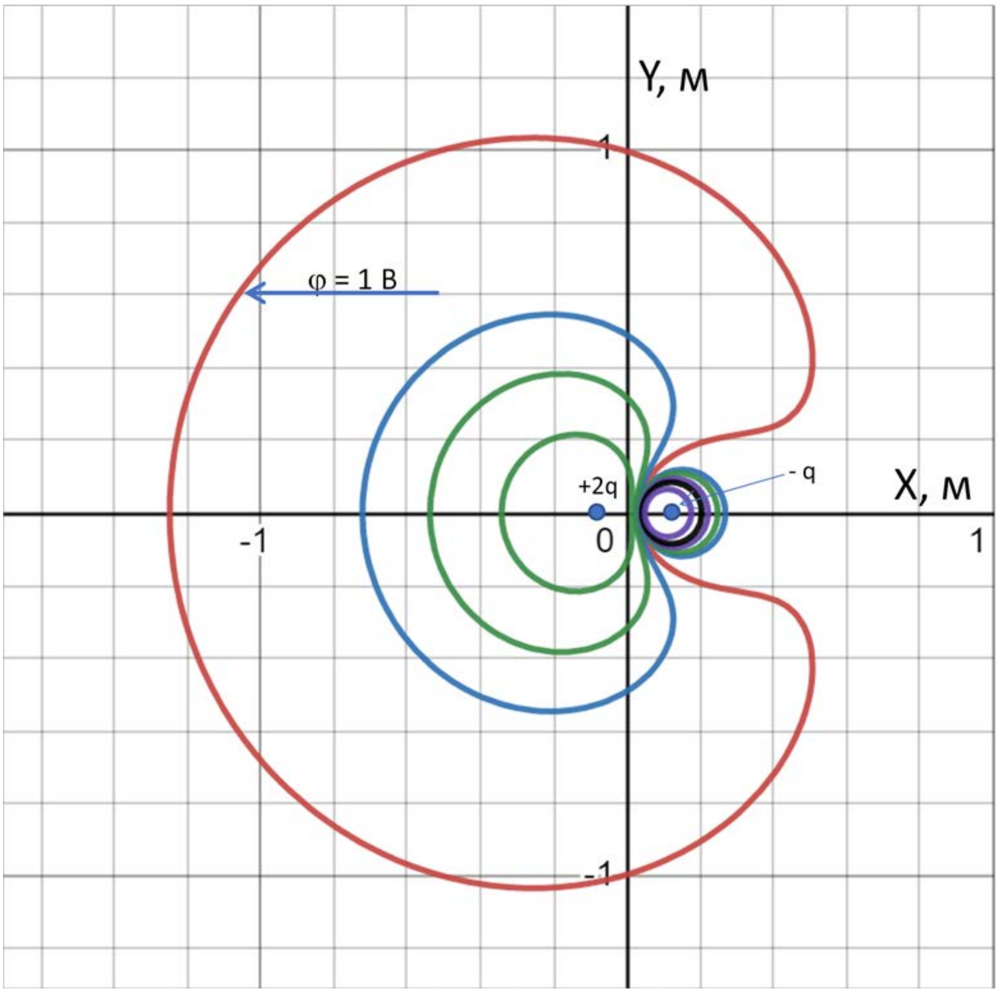


Рисунок 6 -- Эквипотенциальные линии электростатического поля двух зарядов +2q = 2/9 нКл и -q = - 1/9 нКл

Пример варианта заданий для выполнения задачи (вариант № 1)

Задание № 1

По заданным величинам двух неподвижных точечных зарядов и их координатам рассчитать силу взаимодействия между ними. Изобразить на рисунке с соблюдением масштаба:

1) точки расположения зарядов, их радиус-векторы $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$;
2) вектор $\mathbf{r}_{12}$, соединяющий заряды;
3) векторы сил, действующих на заряды.

q_1 = 50 нКл, X_1 = 1 см, Y_1 = 4 см
q_2 = 100 нКл, X_2 = 7 см, Y_2 = 4 см.

Задание № 2

Точечный заряд q закреплён в точке с координатами X_1, Y_1. Найти напряжённость электрического поля в трёх различных точках наблюдения C, D, F. Записать выражения для векторов напряжённости и их абсолютных величин. Изобразить эти векторы на рисунке с соблюдением масштаба. Построить эквипотенциальные поверхности, проходящие через точки C, D, F. Для расчётов в выражении (2.8) величины X_2, Y_2 принять равными координатам точек наблюдения C, D, F: $X_2 = x$, $Y_2 = y$.

q_1 = 20 мкКл, X_1 = 0 см, Y_1 = 0 см.
1) C, x = 2 см, y = 2 см;
2) D, x = 5 см, y = - 3 см;
3) F, x = - 6 см, y = - 7 см.

Задание № 3

Получить выражения для компонент E_x, E_y напряжённости поля двух точечных зарядов в некоторой точке (x, y) через градиент потенциала (см. формулы (6.1), (9.1)). Для этого вычислить производные $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$. Сравнить ответ с формулами (7.4) для напряжённости в выделенной точке C.

Задание № 4

Два точечных заряда

q_1= +1/9 *10^{-9} Кл = 1/9 нКл, q_2 = - 1/9 *10^{-9} Кл = - 1/9 нКл

закреплены на оси *OX* в точках с координатами X_1 = - 0.1 (м), X_2 = + 0.1 (м) (см. пункт 10.1. настоящего описания).

1) Найти значение потенциала поля (в вольтах) в трёх точках L, M, N с заданными координатами.

2) Построить эквипотенциальные линии, проходящие через заданные точки L, M, N (например, используя графическое приложение). Если построение неявной функции вызывает трудности, получить у преподавателя график с эквипотенциальными линиями для задания № 4.

3) Построить векторы напряжённости в трёх выделенных точках L, M, N. Для этого сначала рассчитать значения проекций напряжённости на оси координат по формулам (7.4). Затем построить векторы на распечатанном графике. Указать масштаб.

4) Построить примерный ход силовых линий поля, проходящих через заданные точки L, M, N. Объяснить взаимную ориентацию векторов напряжённости и эквипотенциальных линий.

Точка L: x_L = 5 см, y_L = 5 см.

Точка M: x_M = 10 см, y_M = 5 см.

Точка N: x_N = 13 см, y_N = 0 см.

Задание № 5

Провести через точку M (см. задание № 4) две прямые, параллельные осям *OX* и *OY* системы координат и заданные уравнениями: $y = y_M$, $x = x_M$. Построить графики проекций напряжённости в точках, принадлежащих этим двум взаимно перпендикулярным прямым (см. формулы (7.4)):

1) для прямой $y = y_M$, параллельной оси *OX*, построить графики

$E_x = E_x(x,\ y_M)$, $E_y = E_y(x,\ y_M)$;

2) для прямой $x = x_D$, параллельной оси *OY*, построить графики

$E_x = E_x(x_M,\ y)$, $E_y = E_y(x_M,\ y)$.

Дать качественное объяснение полученных зависимостей.

x_M = 10 см, y_M = 5 см.

Заключение

Проведённое в приложении детальное рассмотрение картины поля одного и двух точечных зарядов поможет в дальнейшем лучше понять другие вопросы электричества. Описанный пример применения принципа суперпозиции сделает более ясными расчёты полей, созданных распределёнными по поверхностям и объёму тел зарядами.

Систему двух одинаковых по модулю, но разных по знаку точечных зарядов можно рассматривать как электрический диполь. Для достаточно удалённых от диполя точек пространства можно пользоваться приближёнными формулами для расчёта напряжённости поля. Они приведены в параграфе 5 пособия [1] и в данной задаче не используются.

Литература

[1] Д. В. Белов. Электромагнетизм и волновая оптика: Учеб. пособие. – М.: Изд-во МГУ, 1994.
[2] Фейнман Р.Ф., Лейтон Р.Б., Сэнде М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. 5: Электричество и магнетизм: Учебное пособие. Пер. с англ./Под ред. Я.А. Смородинского. Изд. 9-е. М.: УРСС: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2015. – 304 с.
[3] И. В. Савельев. Курс общей физики: Учеб. пособие. В 3-х т. Т.2: Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. – М.: Наука. 1988.
[4] Сивухин Д. В. Общий курс физики.Учеб. пособие: Для вузов. В 5 т. Т. III. Электричество. – 6-е изд., стереот. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2020. – 656 с.
[5] Макаров А. М., Лунёва Л. А., Макаров К. А. Теория и практика классической электродинамики: Руководство для фундаментального усвоения курса. – М.: ЛЕНАНД, 2014. – 784 с.