МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М. В. Ломоносова

Физический факультет

кафедра общей физики и физики конденсированных сред

Методическая разработка

по общему физическому практикуму

ВВЕДЕНИЕ К ЛАБ. РАБОТАМ НА ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Доцент Иванова Т. И., доцент Пустовалов Г.Е.

Москва - 2012

Подготовил методическое пособие к изданию доц. Авксентьев Ю.И.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Баллистический метод определения скорости пули (снаряда) основывается на применении законов сохранения: закона сохранения механической энергии, закона сохранения импульса (количества движения) и закона сохранения момента импульса (момента количества движения). Рассмотрим эти законы.

КЛАССИФИКАЦИЯ СИЛ

Если работа силы, совершаемая над материальной точкой, не зависит от формы траектории этой точки, а определяется только начальным и конечным положением точки, то сила называется *потенциальной,* или *консервативной.* Из консервативных сил в механике рассматриваются силы тяготения и упругости.

Если же работа силы над материальной точкой зависит от формы траектории этой точки, то такая сила называется непотенциальной или *неконсервативной*. Примером неконсервативной силы является сила трения.

При рассмотрении движения совокупности тел часто бывает удобно некоторые из этих тел мысленно объединить в систему. Силы, которые действуют на каждое из тел системы со стороны других тел, принадлежащих этой системе, называются *внутренними силами.* Наоборот, те силы, которые действуют на тела системы со стороны тел, не включенных в эту систему, называются *внешними.*

Система тел, на которую не действуют внешние силы, называется *замкнутой.*

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

В том случае, когда внутренние силы являются потенциальными, система при любом заданном расположении тел, входящих в нее, обладает определенной потенциальной энергией U. При изменении расположения тел системы внутренние силы совершают некоторую суммарную работу ΔA. Эта работа равна уменьшению потенциальной энергии системы $-\Delta U$. Чтобы найти саму величину потенциальной энергии системы, нужно еще условиться, при каком расположении тел системы ее потенциальная энергия равна нулю. Таким образом, потенциальна энергия системы равна взятой с обратным знаком работе всех внутренних потенциальных сил при изменении расположения тел системы от заданного до расположения, при котором величина потенциальной энергии считается равной нулю.

Кинетическая энергия системы W равна сумме кинетических энергий всех материальных точек системы, т.е. $W = \sum \frac{m_i v_i^{\,2}}{2}$, где m_i – масса и v_i – скорость материальной точки системы с номером i.

Полная механическая энергия системы E складывается из ее кинетической энергии W и ее потенциальной энергии U.

Полная механическая энергия замкнутой системы тел, внутренние силы которой потенциальны, не изменяется с течением времени, т.е.

$$E = W + U = const \tag{1}$$

Отсюда следует, что

$$\Delta W + \Delta U = 0$$

или

$$\Delta W = -\Delta U \tag{2}$$

Это значит, что приращение кинетической энергии в этом случае равно уменьшению потенциальной энергии.

Если между телами системы действуют также и неконсервативные силы, то полная механическая энергия системы изменится, причем это изменение равно работе $A_{нк}$ неконсервативных сил.

В случае незамкнутой системы полное изменение ее механической энергии ΔE равно сумме работ: 1) $A_{внеш}$ внешних сил и 2) $A_{нк}$ - неконсервативных сил, действующих в этой системе.

Таким образом, в общем случае

$$\Delta E = \Delta W + \Delta U = A_{внеш} + A_{нк} \tag{3}$$

ИМПУЛЬС, ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ И СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

Рассмотрим систему, состоящую из N материальных точек. Точка с номером i, имеющая скорость v_i и массу m_i, как известно, обладает импульсом (количеством движения) $\vec{K}_i = m_i \vec{v}_i$. Импульсом $\vec{K}$ всей системы мы назовем векторную сумму импульсов всех точек системы, т.е.

$$\vec{K} = \sum_{i=1}^{N} \vec{K}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i .$$

При движении каждой точки должен выполняться 2-й закон Ньютона. В частности, для точки с номером i этот закон имеет вид

$$m_i \vec{a}_i = \sum_j \vec{f}_j \quad , \tag{4}$$

где $\vec{a}_i$ - ускорение точки, $\sum_j \overrightarrow{f_j}$ - сумма *всех* сил, действующих на точку.

Учитывая, что $m_i = const$, $m_i \vec{a}_i = m_i \dfrac{d\vec{v}_i}{dt} = \dfrac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} = \dfrac{d\vec{K}_i}{dt}$, уравнение (4) можно представить в виде

$$\frac{d\vec{K}_i}{dt} = \sum_j \vec{f}_j \,. \tag{5}$$

Пусть теперь $\vec{f}_{i1}, \vec{f}_{i2}, ..., \vec{f}_{iN}$ - внутренние силы, действующие на нашу точку со стороны точек 1, 2, 3, …, N соответственно, а $\vec{F}_i$ - сумма внешних сил, действующих на эту точку. Напишем для каждой точки системы, начиная с точки 1 и кончая точкой N, второй закон Ньютона в виде (5):

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{d\vec{K}_1}{dt} = \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + ... + \vec{f}_{1N} + \vec{F}_1, \\
\dfrac{d\vec{K}_2}{dt} = \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + ... + \vec{f}_{2N} + \vec{F}_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dfrac{d\vec{K}_N}{dt} = \vec{f}_{N1} + \vec{f}_{N2} + ... + \vec{f}_{N,N-1} + \vec{F}_N.
\end{array}\right\} \tag{6}$$

Сложим теперь эти уравнения. При этом учтем, что силы взаимодействия между точками системы, согласно 3-му закону Ньютона, попарно равны и противоположны по направлению, т.е. $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}, \vec{f}_{13} = -\vec{f}_{31}, ..., \vec{f}_{1N} = -\overrightarrow{f_{N1}}$ и т.д. Так как все эти пары войдут в сумму сил, то при сложении правых частей уравнений (6) сумма внутренних сил оказывается равной нулю; в правой части остается только $\sum_i \vec{F}_i$ - сумма внешних сил. Складывая левые части уравнений (6) , учитываем, что, согласно правилам дифференциального исчисления

$$\frac{d\vec{K}_1}{dt} + \frac{d\vec{K}_2}{dt} + ... + \frac{d\vec{K}_N}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{K}_1 + \vec{K}_2 + ... + \vec{K}_N) = \frac{d\vec{K}}{dt} \; ,$$

где по определению $\vec{K} = \vec{K}_1 + \vec{K}_2 + ... + \vec{K}_N$ является импульсом всей системы.

Таким образом, мы приходим к уравнению

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \,, \tag{7}$$

определяющему изменение импульса системы: *производная по времени импульса системы (изменение импульса в единицу времени) равна сумме внешних сил, действующих на точки системы.*

Если в любой момент времени $\sum_i \vec{F}_i = 0$, то $\dfrac{d\vec{K}}{dt} = 0$. Следовательно, $\vec{K} = const$. Таким образом, из уравнения (7) вытекает закон сохранения импульса: *импульс системы материальных точек остается постоянным, если сумма внешних сил, действующих на систему, все время равна нулю.*

В частности, в замкнутой системе, на которую внешние силы вообще не действуют, импульс сохраняется.

Вследствие векторного характера уравнения (7) проекция импульса $\vec{K}$ на некоторое направление остается постоянной и в том случае, когда на систему действуют внешние силы, сумма которых, вообще говоря, отлична от нуля, но сумма проекций внешних сил на это направление все время равна нулю.

Например, проекция силы тяжести на горизонтальное направление все время равна нулю. Поэтому в системе, для которой внешними силами являются силы тяжести, остается постоянной проекция импульса системы на горизонтальное направление.

МОМЕНТ СИЛЫ

Пусть на некоторую материальную точку A действует сила $\vec{F}$ (см. рис. 1). Чтобы найти момент этой силы относительно некоторой оси QS, через точку A проводится плоскость P, перпендикулярная оси. От точки O пересечения оси плоскостью к точке A проводится радиус-вектор $\vec{r}$. Сила $\vec{F}$ раскладывается на две составляющие: составляющую $\vec{F}_{||}$, направленную вдоль оси и в дальнейшем не используемую, и составляющую $\vec{F}_{\perp}$, лежащую в плоскости P. Тогда величина момента силы $\vec{F}$ относительно оси QS определяется формулой

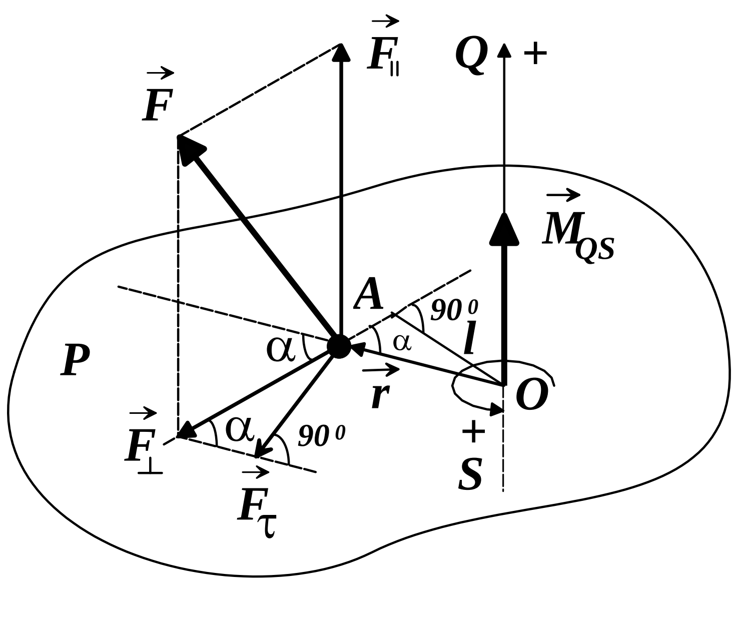

Рис. 1

$$M_{QS} = rF_{\perp} \sin\alpha\ , \qquad (8)$$

где r - величина радиуса-вектора $\vec{r}$, $F_{\perp}$ - величина составляющей $\vec{F}_{\perp}$, а α - угол между направлением радиуса-вектора и направлением $\vec{F}_{\perp}$.

Кратчайшее расстояние l между осью и прямой, по которой направлена составляющая $\vec{F}_{\perp}$, называется плечом. Из рисунка видно, что $l = r\sin\alpha$. Таким образом, согласно формуле (8) , величину момента можно представить в виде

$$M_{QS} = F_{\perp} l\ . \qquad (9)$$

Составляющую $\vec{F}_{\perp}$ можно, в свою очередь, разложить на составляющие, лежащие в плоскости P : одну вдоль радиуса-вектора , а другую - перпендикулярно ему. На рис. 1 показана только составляющая $\vec{F}_{\tau}$, перпендикулярная радиусу-вектору. Из рисунка 1 видно, что величина этой составляющей $\vec{F}_{\tau} = \vec{F}_{\perp} \sin\alpha$.

При помощи формулы (8) теперь найдем, что

$$M_{QS} = rF_{\tau}\ . \qquad (10)$$

Все три формулы (8), (9) и (10) равноправны. В различных случаях удобно пользоваться какой-либо из них. В частности, при помощи формулы (10) легко доказать следующее. Если к некоторой точке приложено несколько сил, то момент суммы этих сил относительно некоторой оси равен сумме моментов всех этих сил относительно той же оси. Следует отметить, что момент суммы сил, приложенных к *разным* точкам, вообще говоря, не равен сумме моментов этих сил.

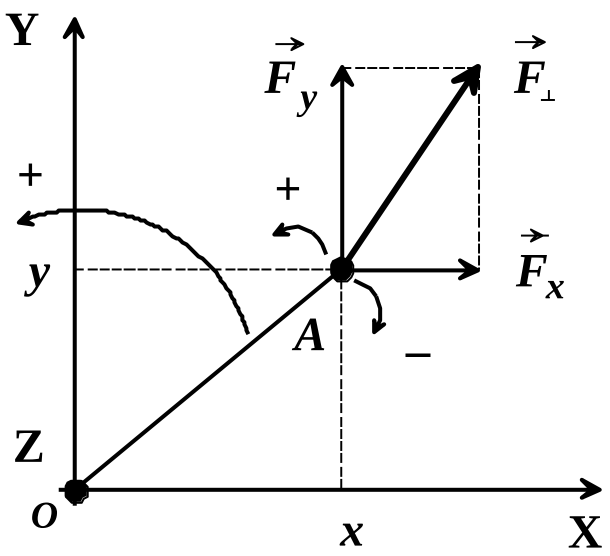

Рис. 2

Формулы (8), (9) и (10) дают величину момента силы. Знак момента силы определяется следующим образом. Выбирается положительное направление вращения вокруг данной оси (при использовании правовинтовой системы это вращение против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси). Если $\vec{F}_{\tau}$ вращает (направлена) в сторону положительного направления вращения, то момент силы положителен, если же $\vec{F}_{\tau}$ направлена в сторону отрицательного направления вращения, то момент отрицателен. Момент силы на рисунке 1, согласно этому правилу, положителен.

Удобно считать момент силы относительно оси вектором, направленным вдоль этой оси (в положительном направлении, если момент положителен, и в отрицательном в обратном случае). Согласно правилам действия с векторами, момент силы может быть представлен в виде векторного произведения

$$\vec{M}_{QS} = \left[\vec{r}, \vec{F}_{\perp}\right]. \qquad (11)$$

В самом деле, величина этого векторного произведения совпадает с величиной момента M_{QS} согласно формуле (8), а направление перпендикулярно и $\vec{r}$ и $\vec{F}_{\perp}$, т.е. вектор $\vec{M}_{QS}$ направлен вдоль оси в сторону, определяемую правилом векторного произведения. Заметим еще, что формулы (8), (9) и (10) вместе с правилом знаков, приведенным выше, дают с этой точки зрения проекцию вектора $\vec{M}_{QS}$ на направление оси QS. Рассмотрим теперь момент силы $\vec{F}$, если ось, относительно которой вычисляется момент, представляет собой ось Z прямоугольной декартовой системы координат. В этом случае плоскость, в которой находится точка A приложения силы, перпендикулярна оси Z и параллельна плоскости XOY (см. рис. 2, на котором ось Z проходит через точку O перпендикулярно плоскости рисунка по направлению к читателю). Составляющая $\vec{F}_{\perp}$ силы $\vec{F}$ лежит в плоскости, параллельной плоскости XOY, т.е. в плоскости рисунка. Эту составляющую можно, в свою очередь, разложить на составляющие $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$, вдоль координатных осей X и Y.

Момент M_z силы $\vec{F}$ будет равен сумме моментов составляющих $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$ относительно оси Z. Как легко видеть из рис. 2, плечом составляющей $\vec{F}_y$ будет величина x, а плечом составляющей $\vec{F}_x$ - величина y, причем x и y равны соответствующим координатам точки A.

Следовательно,

$$M_z = F_y x - F_x y. \qquad (12)$$

Здесь у второго члена стоит знак минус, потому что момент составляющей $\vec{F}_x$, как это можно видеть на рис. 2, отрицателен. Заметим, что в выражении (12) знак момента силы для правой декартовой системы координат получается автоматически в зависимости от величин x, y, F_x и F_y и их знаков.

МОМЕНТ ИМПУЛЬСА

Момент импульса $\vec{L}$ (момент количества движения) материальной точки относительно некоторой оси определяется аналогично моменту силы относительно оси (см. рис. 3). Нужно только во всех рассуждениях и во всех формулах для момента силы (8) – (12) заменить составляющие вектора силы $\vec{F}$ составляющими вектора импульса $\vec{K} = m\vec{v}$ материальной точки. Проделав это, мы получим

$$L_{QS} = rK_{\perp}\sin\alpha = rmv_{\perp}\sin\alpha, \qquad (13)$$

$$L_{QS} = K_{\perp}l = mv_{\perp}l, \qquad (14)$$

$$L_{QS} = rK_{\tau} = rmv_{\tau}, \qquad (15)$$

$$\vec{L}_{QS} = \left[\vec{r}, \vec{K}_{\perp}\right], \qquad (16)$$

$$L_z = K_y x - K_x y = mv_y x - mv_x y \qquad (17)$$

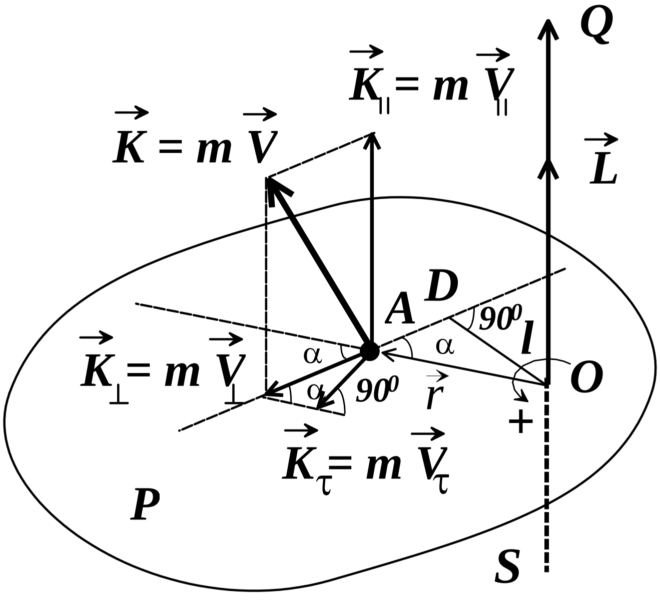

Рис. 3

Рассмотрим теперь в качестве примера два частных случая вычисления момента импульса.

1). Найдем момент импульса материальной точки с массой m, движущейся прямолинейно с постоянной скоростью $\vec{v}$, относительно оси, перпендикулярной направлению движения точки. Проведем через траекторию точки плоскость, перпендикулярную оси (см. рис. 4). Так как скорость точки $\vec{v}$ лежит в этой плоскости, то $\vec{v}_{\perp} = \vec{v}$. Согласно формуле (14) момент импульса точки равен

$$L = mvl, \qquad (18)$$

где l - плечо – кратчайшее расстояние от оси до линии, по которой направлена составляющая импульса точки $\vec{K}_{\perp} = \vec{K}$. Из рис 4 видно, что несмотря на изменение радиуса-вектора $\vec{r}$ ($\vec{r}_1 \longrightarrow \vec{r}_2$) при движении точки плечо l остается постоянным. Следовательно, в этом случае момент импульса $\vec{L}$ в процессе движения не изменяется.

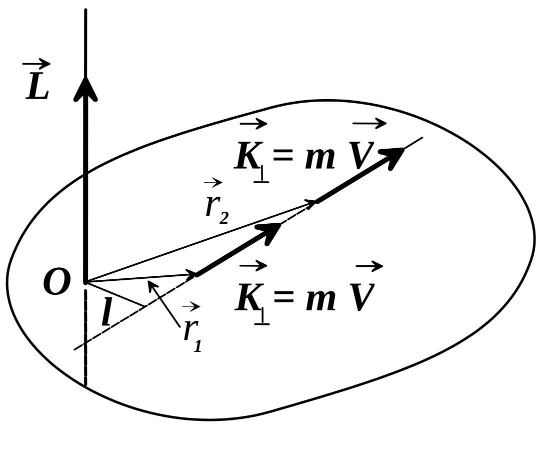

Рис. 4

2) Найдем момент импульса материальной точки, движущейся по окружности радиуса r с постоянной скоростью v, относительно оси, проходящей через центр окружности перпендикулярно плоскости, в которой лежит эта окружность (рис. 5). Поскольку скорость все время лежит в плоскости, перпендикулярной оси, и перпендикулярна радиусу-вектору $\vec{r}$, то в этом случае $\vec{v}_\tau = \vec{v}$. Воспользовавшись формулой (15) , найдем

$$L = mvr. \qquad (19)$$

Как известно, скорость v точки, движущейся по окружности радиуса r, связана с ее угловой скоростью ω соотношением $v = \omega \cdot r$. Используя это соотношение, получим

$$L = mr^2\omega = J\omega, \qquad (20)$$

где величина $J = mr^2$ носит название момента инерции материальной точки. Заметим что и в этом случае $L = const$, поскольку все величины, входящие в формулы (19) и (20) постоянны.

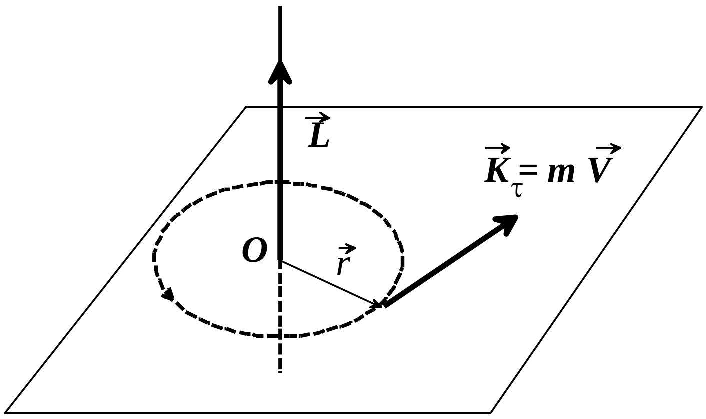

Рис. 5

Если угловую скорость, как это принято, считать вектором $\vec{\omega}$, направленным вдоль оси, положительное направление которой определяется по правилу правого буравчика (ручку буравчика нужно вращать по направлению движения точки), то формуле (20) можно придать векторный вид

$$\vec{L} = mr^2\vec{\omega} = J\vec{\omega}. \qquad (21)$$

Вектор $\vec{L}$ направлен в ту же сторону, что и $\vec{\omega}$. То же направление получается и по формуле (16).

УРАВНЕНИЕ МОМЕНТОВ ДЛЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Пусть материальная точка массы m движется под действием силы $\vec{F}$. Если выбрана прямоугольная декартова система координат, в которой описывается движение точки, то момент силы и момент импульса точки относительно оси Z выражаются формулами (12) и (17). Сделаем два замечания: 1) под силой $\vec{F}$ следует подразумевать сумму всех сил, действующих на точку; 2) если желательно моменты вычислять относительно какой-либо определенной оси, то всегда можно выбрать систему координат так, чтобы ось Z совпадала с данной осью.

Найдем уравнение, связывающее производную $\frac{dL_z}{dt}$ момента импульса точки по времени с моментом силы M_z, аналогичное 2-му закону Ньютона, который связывает производную импульса $\frac{d\vec{K}}{dt}$ и силой $\vec{F}$, действующей на нее.

Продифференцируем выражение (17) по времени, учитывая, что от времени могут зависеть координаты точки и проекции ее скорости. В результате получится

$$\frac{dL_z}{dt} = m\frac{dv_y}{dt}x + mv_y\frac{dx}{dt} - m\frac{dv_x}{dt}y - mv_x\frac{dy}{dt}.$$

Как известно,

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dv_x}{dt} = a_x \text{ и } \frac{dv_y}{dt} = a_y,$$

где a_x и a_y - проекции ускорения на оси координатные оси X и Y.
Следовательно,

$$\frac{dL_z}{dt} = ma_y x - ma_x y.$$

С другой стороны, согласно 2-му закону Ньютона, $ma_x = F_x$ и $ma_y = F_y$.
Поэтому

$$\frac{dL_z}{dt} = F_y x - F_x y.$$

Сравнив это выражение с формулой (12), находим искомое уравнение

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z. \tag{22}$$

Поскольку, как уже говорилось, ось может быть выбрана произвольно, а на точку может действовать несколько сил, то уравнение справедливо и в более общем виде в векторной форме

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_i. \tag{23}$$

Таким образом, *производная по времени момента импульса материальной точки относительно некоторой оси равна сумме моментов всех сил (относительно той же оси), действующих на эту точку*. Уравнение (23) мы будем называть уравнением моментов для материальной точки.

Возвращаясь к примерам, рассмотренным на стр. 10-12 , можно отметить, что в первом случае на точку не действуют никакие силы, так как она движется прямолинейно и равномерно. При этом импульс точки остается постоянным. Более того, если силы равны нулю, то равен нулю момент сил. Согласно уравнению (23) должна быть равна нулю и производная момента импульса. Следовательно, момент импульса также должен оставаться постоянным в согласии с выводом, сделанным ранее.

Во втором случае, когда точка движется по окружности, закон сохранения импульса не выполняется, так как на точку обязательно должна действовать сила, сообщающая ей центростремительное ускорение. Хотя скорость точки и постоянна по величине, ее направление все время меняется. Следовательно, изменяется по направлению и импульс точки. С другой стороны, сила, действующая на точку, направлена по радиусу. Плечо этой силы равно нулю. Поэтому равен нулю и момент силы. Таким образам, в данном случае в соответствии с уравнением (23) момент импульса точки остается постоянным, как это было показано выше.

УРАВНЕНИЕ МОМЕНТОВ ДЛЯ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Моментом импульса $\vec{L}$ системы материальных точек относительно некоторой оси мы будем называть сумму моментов импульсов относительно той же оси всех точек, составляющих эту систему, т.е. $\vec{L} = \sum_i \vec{L_i}$, где $\vec{L_i}$ - момент импульса точки с номером i.

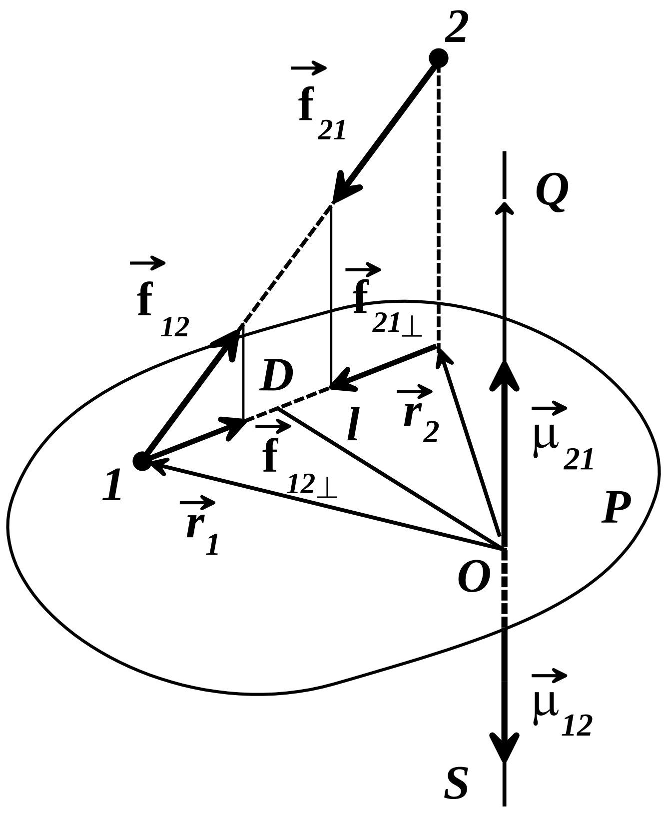

Рис. 6

Покажем предварительно, что моменты внутренних сил попарно равны и противоположны. Пусть 1 и 2 точки системы, взаимодействующие между собой (см. рис. 6). Точка 1 действует на точку 2 силой $\vec{f}_{21}$, а точка 2 на точку 1 – силой $\vec{f}_{12}$. Эти силы, согласно 3-му закону Ньютона, равны по величине и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Найдем моменты μ_{12} и μ_{21} этих сил относительно оси

QS. Для этого проведем плоскость P, перпендикулярную оси QS (для простоты рисунка плоскость P мы провели через точку 1). Составляющие $\vec{f}_{12\perp}$ и $\vec{f}_{21\perp}$ этих сил, лежащие в плоскости P, как легко видеть, также равны по величине и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Поэтому плечом l и для той и для другой составляющей будет один и тот же перпендикуляр OD, проведенный в плоскости P от оси к линии, по которой направлены $\vec{f}_{12\perp}$ и $\vec{f}_{21\perp}$ (несмотря на то, что радиус-векторы $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ точек 1 и 2 не равны между собой). Таким образом, момент $\mu_{12} = f_{12\perp}l$ силы $\vec{f}_{12}$ равен по величине моменту $\mu_{21} = f_{21\perp}l$ силы $\vec{f}_{21}$. Так как $\vec{f}_{12\perp}$ и $\vec{f}_{21\perp}$ направлены противоположно, то моменты $\vec{\mu}_{12}$ и $\vec{\mu}_{21}$ вращают в разные стороны. Следовательно, $\vec{\mu}_{12} = -\vec{\mu}_{21}$.

Рассмотрим систему, состоящую из N материальных точек. На точку с номером i со стороны точек 1, 2, 3,…, N действуют внутренние силы, которые создают относительно некоторой заданной оси моменты сил $\vec{\mu}_{i1}, \vec{\mu}_{i2}, ..., \vec{\mu}_{iN}$. Кроме того, на эту же точку могут действовать и внешние силы. Пусть $\vec{M}_i$ - момент суммы этих сил относительно той же оси. Напишем для каждой точки системы уравнение моментов относительно данной оси:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\vec{L}_1}{dt} = \vec{\mu}_{12} + \vec{\mu}_{13} + ... + \vec{\mu}_{1N} + \vec{M}_1, \\ \dfrac{d\vec{L}_2}{dt} = \vec{\mu}_{21} + \vec{\mu}_{23} + ... + \vec{\mu}_{2N} + \vec{M}_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d\vec{L}_N}{dt} = \vec{\mu}_{N1} + \vec{\mu}_{N2} + ... + \vec{\mu}_{N,N-1} + \vec{M}_N. \end{array}\right\} \qquad (24)$$

Сложим теперь эти уравнения. При сложении левых частей получим

$$\frac{d\vec{L}_1}{dt} + \frac{d\vec{L}_2}{dt} + ... + \frac{d\vec{L}_N}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + ... + \vec{L}_N) = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

Так как моменты внутренних сил попарно равны и противоположны по знаку

$$\vec{\mu}_{12} = -\vec{\mu}_{21}, \vec{\mu}_{13} = -\vec{\mu}_{31}, ..., \vec{\mu}_{1N} = -\vec{\mu}_{N1}$$

и т.д., то в результате сложения в правой части останется лишь сумма моментов внешних сил, т.е. $\sum_i \vec{M}_i$. Таким образом, мы получаем уравнение моментов для системы материальных точек:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{M}_i \,, \qquad (25)$$

т.е. *<u>производная по времени момента импульса системы материальных точек относительно некоторой оси равна сумме моментов внешних сил, действующих на систему (относительно той же оси).</u>*

Из этого уравнения вытекает закон сохранения момента импульса системы материальных точек*<u>: если все время равна нулю сумма моментов внешних сил, действующих на систему, относительно некоторой оси, то момент импульса системы относительно той же оси остается постоянным.</u>* В самом деле, если $\sum_i \vec{M}_i = 0$, то $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$, и, следовательно, $\vec{L} = const$.

Момент импульса замкнутой системы относительно любой оси остается постоянным, так как в этом случае отсутствуют внешние силы. Однако могут быть случаи, когда момент импульса сохраняется относительно какой-либо оси и для незамкнутой системы. В частности, это бывает, если все внешние силы направлены вдоль этой оси, или линии, по которым направлены внешние силы, проходят через ось.

ВРАЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Твердое тело является частным случаем системы материальных точек. Поэтому для него верны все полученные выше выводы. Найдем уравнение моментов в случае вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

При вращении твердого тела с угловой скоростью ω каждый элемент тела с массой Δm_i движется в плоскости, перпендикулярной оси, по окружности некоторого радиуса r_i с той же угловой скоростью. Момент импульса $\Delta\vec{L}_i$ каждого элемента тела можно подсчитать по формуле (21):

$$\Delta\vec{L} = \Delta m_i r_i^{\,2}\vec{\omega} = \Delta J_i \vec{\omega} \,, \qquad (26)$$

где $\Delta J = \Delta m_i r_i^{\,2}$ - момент инерции элемента относительно оси вращения. Момент импульса твердого тела найдем, сложив моменты импульсов всех его элементов:

$$\vec{L} = \sum_i \Delta \vec{L_i} = \vec{\omega} \sum_i \Delta J_i = J\vec{\omega}, \qquad (27)$$

где $J = \sum_i \Delta J_i = \sum_i \Delta m_i r_i^{\ 2}$ - момент инерции тела относительно оси вращения.

Так как момент инерции J - величина постоянная, то из уравнения моментов (25) получим для твердого тела

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(J\vec{\omega}) = J\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \sum_i \vec{M}_i \ . \qquad (28)$$

Здесь $\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\beta}$ - угловое ускорение, одинаковое для всех точек тела. Таким образом, уравнение моментов в случае вращения твердого тела имеет вид

$$J\vec{\beta} = \sum_i \vec{M}_i \ , \qquad (29)$$

где $\sum_i \vec{M}_i$ - момент внешних сил, действующих на тело, относительно оси вращения.

Если $\sum_i \vec{M}_i = 0$, то из уравнения (28) следует, что $\dfrac{d(J\vec{\omega})}{dt} = 0$ и $\vec{L} = J\vec{\omega} = const$. В этом случае твердое тело вращается с постоянной угловой скоростью.

Найдем еще выражение для кинетической энергии твердого тела при вращении его вокруг неподвижной оси. Каждый элемент тела в этом случае имеет скорость $v_i = \omega \cdot r_i$. Его кинетическая энергия

$$\Delta W = \frac{\Delta m_i v_i^{\ 2}}{2} = \frac{\Delta m_i r_i^{\ 2} \omega^2}{2} = \frac{\Delta J_i \omega^2}{2} \quad .$$

Складывая энергию всех элементов тела, получим

$$W = \sum_i \Delta W_i = \sum_i \frac{\Delta J_i \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_i \Delta J_i \ .$$

Так как $\sum_i \Delta J_i = J$ - момент инерции тела относительно оси вращения, то окончательно получим

$$W = \frac{J\omega^2}{2}. \qquad (30)$$