



ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА НА ВОЗДУШНОЙ ПОДУШКЕ

Цель работы

Изучение динамики вращательного движения твердого тела.

Идея эксперимента

Использование системы на воздушной подушке позволяет практически полностью устранить силу сухого трения между движущимся телом и поверхностью.

Теоретическое введение

Уравнение вращательного движения твердого тела (уравнение моментов) имеет следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}. \quad (5.1)$$

Здесь величина $\mathbf{L} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ (\mathbf{p}_i – импульс i -й материальной точки) называется *моментом импульса* системы относительно некоторой неподвижной точки, выбранной за начало координат; $\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$ – *момент внешних сил* относительно той же точки; \mathbf{F}_i – сумма всех внешних сил, действующих на i -ю материальную точку; \mathbf{r}_i – радиус-вектор указанной точки.

Если твердое тело вращается вокруг закрепленной оси, то векторное уравнение (5.1) сводится к скалярному уравнению. В частности, если ось вращения совпадает с осью координат Z , то

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z, \quad (5.2)$$

где L_z, M_z – соответственно проекции \mathbf{L} и \mathbf{M} на ось Z .

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси Z с угловой скоростью ω скорость каждой материальной точки m_i тела равна $v_i = \omega \rho_i$ где ρ_i – ее расстояние до оси Z . Проекции моментов импульса на ось Z для этих точек равны $L_{iz} = \rho_i m_i v_i = \omega m_i \rho_i^2$. В связи с тем, что угловая скорость ω одинакова для всех точек твердого тела, момент импульса всего тела относительно оси Z равен

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \omega \sum_i m_i \rho_i^2 = \omega J. \quad (5.3)$$

Величину

$$J = \sum_i m_i \rho_i^2 \quad (5.4)$$

называют *моментом инерции твердого тела относительно оси вращения*, который является мерой инертности тела при вращательном движении.

Подставляя (5.3) в (5.2), получаем *основное уравнение вращательного движения* тела вокруг закрепленной оси z :

$$\frac{d(\omega J)}{dt} = M_z. \quad (5.5)$$

Поскольку расположение точек в твердом теле со временем не меняется, момент инерции является постоянной величиной. Поэтому уравнение (5.5) может быть представлено в следующем виде:

$$J \frac{d\omega}{dt} = J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = J\varepsilon = M_z. \quad (5.6)$$

При непрерывном распределении массы по объему, для вычисления момента инерции суммирование заменяют интегрированием по всему объему тела и (5.4) приводится к следующему виду:

$$J = \int \rho^2 dm. \quad (5.7)$$

Если известен момент инерции J_0 относительно некоторой оси, проходящей через центр масс – точку с радиусом-вектором

$\mathbf{R} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{r}_i$, (m – масса тела, m_i – масса материальной точки тела, \mathbf{r}_i – ее радиус-вектор), то в соответствии с *теоремой Гюйгенса–Штейнера* момент инерции J тела относительно любой другой оси, параллельной первоначальной и находящейся на расстоянии a от нее, равен

$$J = J_0 + ma^2. \quad (5.8)$$

Для экспериментальной проверки основного уравнения вращательного движения (5.6) тела вокруг неподвижной оси в работе используется составное тело-маятник на воздушной подушке. Оно состоит из стержня и трех шкивов различного радиуса R , укрепленных на одной вертикальной оси. По стержню могут перемещаться и

закрепляться на нем в нужном положении два груза одинаковой массы (рис. 5.1). Маятник может приводиться во вращение при помощи груза массой m , прикрепленного к концу нити, которая перекинута через блок и намотана на тот или иной шкив.

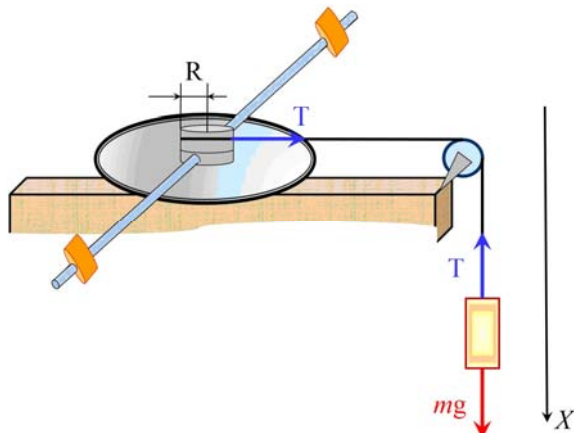


Рис. 5.1. Схематическое представление маятника.

Если считать, что блок невесом, нить невесома и нерастяжима и пренебречь силами трения, то уравнение вращательного движения маятника:

$$J\varepsilon = RT, \quad (5.9)$$

уравнение поступательного движения груза на нити:

$$ma = mg - T, \quad (5.10)$$

уравнение кинематической связи

$$a = \varepsilon R. \quad (5.11)$$

Здесь R – радиус шкива, T – сила натяжения нити, a – линейное ускорение груза массой m , g – ускорение свободного падения.

Из системы уравнений (5.9)–(5.11) следует, что вращение маятника будет происходить с постоянным угловым ускорением, равным

$$\varepsilon = \frac{Rmg}{J + mR^2}. \quad (5.12)$$

Полный момент инерции маятника с грузами равен

$$J = J_0 + J_{\text{гр}} + 2m_{\text{гр}}l^2, \quad (5.13)$$

где J_0 , $J_{гр}$ – моменты инерции маятника и двух грузов относительно осей, проходящих через их центры масс, $m_{гр}$ – масса грузов на стержне, l – расстояние от центров масс грузов до оси вращения. С учетом (5.12) и (5.13) для углового ускорения получаем формулу

$$\varepsilon = \frac{Rmg}{J_0 + J_{гр} + 2m_{гр}l^2 + mR^2}. \quad (5.14)$$

Положение точек маятника определяется их расстоянием до оси вращения и законом изменения угла от времени, которое является решением уравнения вращательного движения маятника (5.9):

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad (5.15)$$

где φ_0 – начальный угол, ω_0 – начальная угловая скорость, ε – угловое ускорение. Если движение начинается без начальной угловой скорости, то изменение угла равно

$$\Delta\varphi(t) = \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (5.16)$$

Экспериментальная установка

Общий вид установки показан на рис. 5.2. Диск 1 с нанесенной на него шкалой позволяет измерять угол отклонения маятника. К диску прикреплен стержень 2, по которому могут перемещаться два груза. Изменяя положение грузов, можно изменять момент инерции маятника. Диск лежит на круглой платформе с отверстиями, через которые выходит воздух, нагнетаемый компрессором 4 через опорную трубку 3.



Рис. 5.2. Общий вид маятника на воздушной подушке.

Трубка 3 закреплена на основании 5. На другом конце основания находится блок 6, через который перекинута нить с грузом (крючком). На спусковом механизме 7 имеется стопор, который позволяет фиксировать положение диска. Запуск происходит при нажатии на рычаг спускового механизма.

Для измерения времени поворота маятника используется цифровой таймер*) (см. Приложение 1), который запускается в момент нажатия рычага спускового механизма и останавливается сигналом от лазера, когда в отверстие в диске попадает лазерный луч. Угол поворота определяется по нанесенной на диске шкале.

Эксперимент

Все электрические соединения на установке выполнены заранее, и установка полностью готова к работе. Перед началом работы следует убедиться, что включен таймер (светится его индикатор). Ручку выбора режима работы таймера установить в одно из трех имеющихся положений, отмеченных значком Δt_{AB} , при котором в группе светодиодов загорится индикаторный светодиод «ms» и на индикаторе появится знак десятичной запятой, соответствующий десятым долям миллисекунды. Это обеспечит максимальную точность измерения интервалов времени.

Упражнение 1. Определение углового ускорения и проверка основного уравнения вращательного движения.

Измерение

Основное уравнение вращательного движения фактически соответствует двум утверждениям: 1) угловое ускорение тела пропорционально моменту внешних сил и 2) угловое ускорение обратно пропорционально моменту инерции тела. Эти положения проверяются в *упр. 1* и *2* соответственно.

Если тело вращается с постоянным угловым ускорением без начальной угловой скорости, то угол его поворота определяется формулой (5.16). Чтобы проверить эту формулу, нужно измерить время поворота маятника для ряда заданных углов и убедиться, что изменение угла будет пропорционально квадрату времени.

1. Установите грузы на маятнике в крайнее положение, т.е. на максимальном расстоянии от оси вращения. Намотайте нить на наи-

*) На рис. 5.1 не показан.

меньший шкив. На конец нити, перекинутой через блок, подвесьте в качестве грузов два крючка.

2. Включите компрессор, нажав кнопку. Попробуйте повернуть маятник и убедитесь, что он легко вращается, а лазерный луч проходит через отверстие в диске.

3. Отклоните маятник на 20° и зафиксируйте с помощью пускового механизма.

4. Нажмите кнопку «Reset» на таймере, обнулив его показания. Установка готова к измерению.

5. Нажмите спусковой рычаг на пусковом механизме. Маятник придет в движение, и таймер начнет отсчет времени. При прохождении отверстия мимо лазерного луча на таймере отобразится время t_i поворота на заданный угол. Проведите измерения три раза. Запишите значения t_i в табл. 5.1.

6. Далее, увеличивая угол отклонения маятника с шагом 20° до 120° , повторите пп. 3–5.

7. Намотайте нить на самый большой шкив и повторите пп. 3–6. Результаты запишите в табл. 5.1.

8. Затем для самого маленького и большого шкивов проведите измерения согласно пп. 2–6, используя в качестве груза один крючок. Суммарную массу крючков, радиусы используемых шкивов, а также значения t_i для каждого измерения запишите в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Значение времени t_i для различных углов поворота маятника

$\Delta\varphi$	$2\Delta\varphi$	$\sigma_{2\Delta\varphi}$	t_i	\bar{t}	$\sigma_{\bar{t}\Sigma}$	\bar{t}^2	$S_{\bar{t}^2}$	ε	S_ε	Rmg
	рад	рад	с	с	с	с ²	с ²	$\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$	$\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$	Н·м
$m = R =$										
20°										
40°										
...	
$m = R = \dots$										

Обработка результатов

1. Для каждого из углов найдите среднее арифметическое значение времени поворота:

$$\bar{t} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k t_i.$$

2. Рассчитайте случайную погрешность $S_{\bar{t}}$ среднего арифметического по формуле

$$S_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{1}{k(k-1)} \sum_{i=1}^k (t_i - \bar{t})^2}.$$

3. Оцените суммарную погрешность по формуле:

$$\sigma_{t\Sigma} = \sqrt{S_{\bar{t}}^2 + \sigma_t^2},$$

где σ_t – приборная погрешность таймера. При отсутствии заводского описания погрешность цифровых приборов можно приближенно приравнять 2-3 единицам младшего разряда индикатора.

4. Переведите величину $2\Delta\varphi$ из градусов в радианы.

5. Результаты пп. 1–4 запишите в табл. 5.1.

6. Постройте график зависимости t^2 от $2\Delta\varphi$. Используя МНК, аппроксимируйте его линейной зависимостью с помощью метода наименьших квадратов: $t^2 = A \cdot (2\Delta\varphi)$. Определите коэффициент A и его погрешность S_A , угловое ускорение $\varepsilon = 1/A$ и его погрешность S_ε по формуле для косвенных измерений $S_\varepsilon = \varepsilon S_A / A$. Результаты запишите в табл. 5.1.

7. Найдите значение момента силы натяжения нити $M = Rmg$ и запишите в табл. 5.1.

8. Постройте график зависимости ε от M .

Поскольку в условиях эксперимента $mR^2 \ll J_0 + J_{\text{гр}} + 2m_{\text{гр}}l^2$ (ввиду малого веса подвешиваемых крючков и малости радиуса шкива), формулу (5.14) можно записать в виде:

$$\varepsilon \approx \frac{1}{J_0 + J_{\text{гр}} + 2m_{\text{гр}}l^2} Rmg = A \cdot (Rmg) = A \cdot M,$$

то есть угловое ускорение должно быть пропорционально моменту M силы тяжести подвешенных крючков. Чтобы проверить это, с помощью МНК аппроксимируйте график $\varepsilon(M)$ линейной зависимостью

6. Далее, сдвигая симметрично грузы к оси, повторите пп. 2–5.

Обработка результатов

1. Для каждого значения l найдите среднее арифметическое значение времени:

$$\bar{t} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k t_i .$$

2. Рассчитайте случайную погрешность среднего арифметического $S_{\bar{t}}$ по формуле:

$$S_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{1}{k(k-1)} \sum_{i=1}^k (t_i - \bar{t})^2} .$$

3. Оцените суммарную погрешность по формуле:

$$\sigma_{\bar{t}\Sigma} = \sqrt{S_{\bar{t}}^2 + \sigma_t^2} ,$$

где σ_t – приборная погрешность таймера. Погрешность цифрового таймера можно приближенно оценить в 2-3 единицы младшего разряда индикатора.

4. Вычислите \bar{t}^2 и найдите ε по формуле:

$$\varepsilon = \frac{2\Delta\varphi}{\bar{t}^2} ,$$

а также погрешность

$$\sigma_{\varepsilon} = \frac{2\varepsilon}{\bar{t}} \sigma_{\bar{t}\Sigma} .$$

5. Результаты пп. 1–4 запишите в табл. 5.2.

6. Постройте график зависимости ε от l^2 . Качественно проанализируйте эту зависимость.

7. Для количественной проверки теоремы Гюйгенса–Штейнера перепишем формулу (5.14) в виде:

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{J_0 + J_{\text{гр}} + mR^2}{Rmg} + \frac{2m_{\text{гр}}}{Rmg} l^2 = B + Al^2 .$$

Отсюда видно, что в случае справедливости теоремы Гюйгенса–Штейнера величина $1/\varepsilon$ должна линейно зависеть от l^2 , а коэффициент наклона должен быть равен

$$A = \frac{2m_{\text{гр}}}{Rmg}. \quad (5.17)$$

Постройте график зависимости $1/\varepsilon$ от l^2 . С помощью МНК аппроксимируйте график линейной зависимостью, запишите коэффициент корреляции и определите экспериментальный коэффициент A и его погрешность S_A .

Рассчитайте теоретический коэффициент A_T по формуле (5.17) и его погрешность S_{A_T} , исходя из точности задания параметров $m_{\text{гр}}$, m и R . На основании полученных результатов сделайте вывод о выполнении второго следствия из **основного уравнения вращательного движения** – обратной пропорциональности углового ускорения и момента инерции системы, и о выполнении теоремы Гюйгенса–Штейнера.

Основные итоги работы

В результате работы экспериментально проверяется выполнение основного уравнения вращательного движения и теорема Гюйгенса – Штейнера. Определяется угловое ускорение вращательного движения маятника.

Контрольные вопросы

1. Что такое угловая скорость и угловое ускорение тела?
2. Запишите уравнение вращательного движения маятника.
3. Запишите закон вращательного движения маятника.
4. Сформулируйте и докажите теорему Гюйгенса – Штейнера.
5. Что такое средняя скорость, мгновенная скорость?