

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**имени М. В. Ломоносова**

---

**Физический факультет**  
**кафедра общей физики и физики конденсированного состояния**

**Методическая разработка**  
**по общему физическому практикуму**

**Лаб. работа № 46**

**ИЗУЧЕНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ  
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В  
РЕЗОНАНСНОМ КОНТУРЕ**

**Работу поставил доцент Авксентьев Ю.И.**

**Москва - 2012**

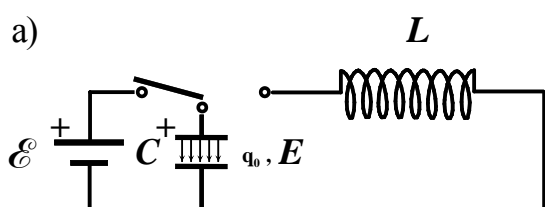
# ИЗУЧЕНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В РЕЗОНАНСНОМ КОНТУРЕ

## Краткое теоретическое введение \*)

### § 1 Собственные электрические колебания без активного сопротивления в контуре

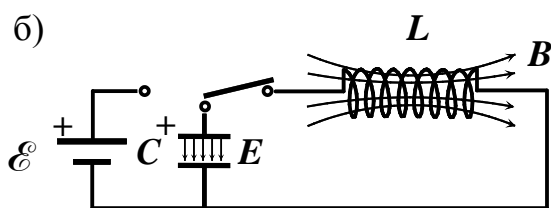
Собственные колебания происходят в изолированной системе, выведенной из положения равновесия. Рассмотрим простейший электрический контур. Он состоит из последовательно соединенных емкости  $C$  и индуктивности  $L$ .

Чтобы возбудить в контуре колебания, вначале присоединим конденсатор к источнику питания  $\mathcal{E}$  (рис. 1а). В результате на обкладках конденсатора появится заряд  $q_0$ , а между обкладками – электрическое поле  $E$ .



Отключим теперь источник питания и замкнем конденсатор на индуктивность (рис. 1б). Конденсатор начнет разряжаться, и в контуре потечет ток, сила которого

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad (1)$$



Вместе с уменьшением электрического заряда конденсатора начнет уменьшаться и электрическое поле. При этом в катушке индуктивности возникает магнитное поле  $B$ . Найдем закон, по которому изменяются заряд на обкладках конденсатора и ток в контуре.

Рис. 1

По второму правилу Киргофа сумма падений напряжений вдоль замкнутого контура равна сумме эдс, действующих в нем:

$$\frac{q}{C} = -L \frac{di}{dt}, \quad (2)$$

где  $\frac{q}{C} = U_C$  - напряжение на конденсаторе,  $\mathcal{E}_L = -L \frac{di}{dt}$  - электродвижущая сила самоиндукции.

Учитывая, что  $i = \frac{dq}{dt}$ , перепишем (2) следующим образом:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = -\frac{1}{LC} q. \quad (3)$$

\*) При написании теоретического введения было использовано метод. пособ. Волковой Н.В. к задаче «Изучение вынужденных электрических колебаний в резонансном контуре». М. 1985 г.

Это дифференциальное, однородное уравнение второго порядка. Решить его – значит найти такую функцию времени  $q = f(t)$ , которая после подстановки ее в это уравнение обратит его в тождество. Нетрудно догадаться, какой вид должна иметь искомая функция. Из уравнения (3) следует, что функция  $q = f(t)$  должна обладать следующим свойством: вторая производная этой функции по времени с точностью до постоянного множителя должна равняться самой функции. Таким свойством, в частности, обладает функция косинус. Очевидно, что это свойство функции не изменится, если саму функцию и ее аргумент умножить на некоторые константы  $A_0, \omega_0$  и в дополнение к этому прибавить к аргументу  $\omega_0 t$  третью константу  $\varphi_0$ . Таким образом, решение уравнения (3) следует искать в виде

$$q = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

В теории колебаний константа  $A_0$  называется амплитудой колебания,  $\omega_0$  – круговой частотой колебаний, а  $\varphi_0$  – начальной фазой колебаний. Отметим также, что аргумент  $\omega_0 t + \varphi_0$  гармонической функции принято называть фазой колебаний.

Для нахождения значений констант  $A_0, \omega_0, \varphi_0$  необходимо вычислить вторую производную  $\frac{d^2 q}{dt^2}$  и вместе с функцией  $q$  подставить в уравнение (3). Путем вычислений убеждаемся, что функция  $q = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$  удовлетворяет уравнению (3), при условии, если частота колебаний  $\omega_0$  равна

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (4)$$

Амплитуда  $A_0$  и начальная фаза  $\varphi_0$  определяются начальными условиями. Если колебания в контуре возбуждаются так, как представлено на рис. 1, то начальные условия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} t &= 0, \\ 1) q &= q_0, \\ 2) i &= i_0 = \frac{dq}{dt} = 0 \end{aligned}$$

где  $q_0$  – электрический заряд, возникший на обкладках конденсатора после подключения его к источнику с ЭДС  $\mathcal{E}$ .

После подстановки  $q = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$  в 1) и 2) и решения полученной системы уравнений получим:  $A_0 = q_0, \varphi_0 = 0$ .

Итак, заряд на обкладках конденсатора  $q(t)$  изменяется со временем по гармоническому закону :

$$q = q_0 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t\right). \quad (5)$$

Таким образом, мы выяснили, что частота собственных колебаний контура  $\omega_0$  зависит только от параметров системы: индуктивности  $L$  и

емкости  $C$ . При вычислении  $\omega_0$  надо брать  $L$  и  $C$  в одной системе единиц:  $L$  - в генри,  $C$  - в фарадах. Период колебаний  $T_0$  связан с частотой формулой

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC} \quad (6)$$

То же самое можно сказать об изменении напряжения на конденсаторе:

$$U_c = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right).$$

Продифференцировав (5) по времени, получим силу тока в цепи:

$$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{LC}} q_0 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right) = i_0 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t + \frac{\pi}{2}\right).$$

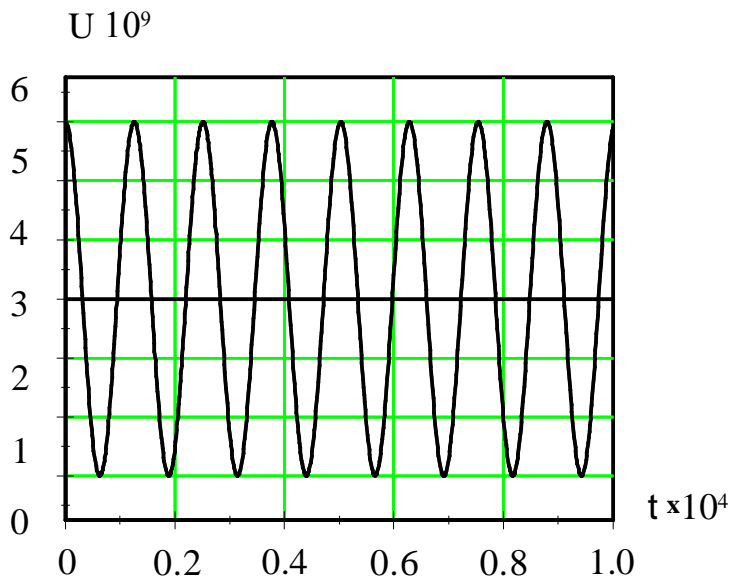


Рис. 2

Из последнего равенства видно, что колебания тока опережают колебания заряда и напряжения между обкладками конденсатора на  $\frac{\pi}{2}$  радиан. Заряд конденсатора обращается в нуль, когда сила тока достигает своей наибольшей величины  $i_0 = \omega_0 q_0$ . На экране осциллографа колебания напряжения на конденсаторе выглядят так, как это изображено на рис. 2.

## §2 Свободные затухающие колебания

### а) Уравнение затухающих колебаний

Всякий реальный контур обладает активным сопротивлением  $R$ . Энергия,

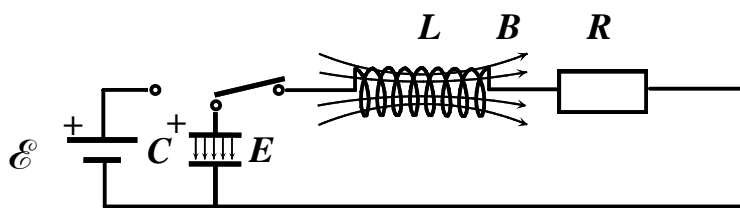


Рис. 3

запасенная в контуре, постепенно расходуется путем выделения тепла на этом сопротивлении, вследствие чего, как мы увидим ниже, свободные колебания затухают. Схема реального колебательного контура приведена на рис. 3.

Выведем уравнение колебаний в таком контуре. Сумма падений напряжений на емкости  $U_C = \frac{q}{C}$  и активном сопротивлении  $U_R = Ri$  (по второму правилу Киргофа) должна быть равна сумме действующих в контуре ЭДС:

$$Ri + \frac{1}{C}q = -L \frac{di}{dt},$$

где

$$-L \frac{di}{dt} = \mathcal{E}_L$$

электродвижущая сила индукции. Принимая во внимание, что  $i = \frac{dq}{dt}$ ,

получим

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0. \quad (7)$$

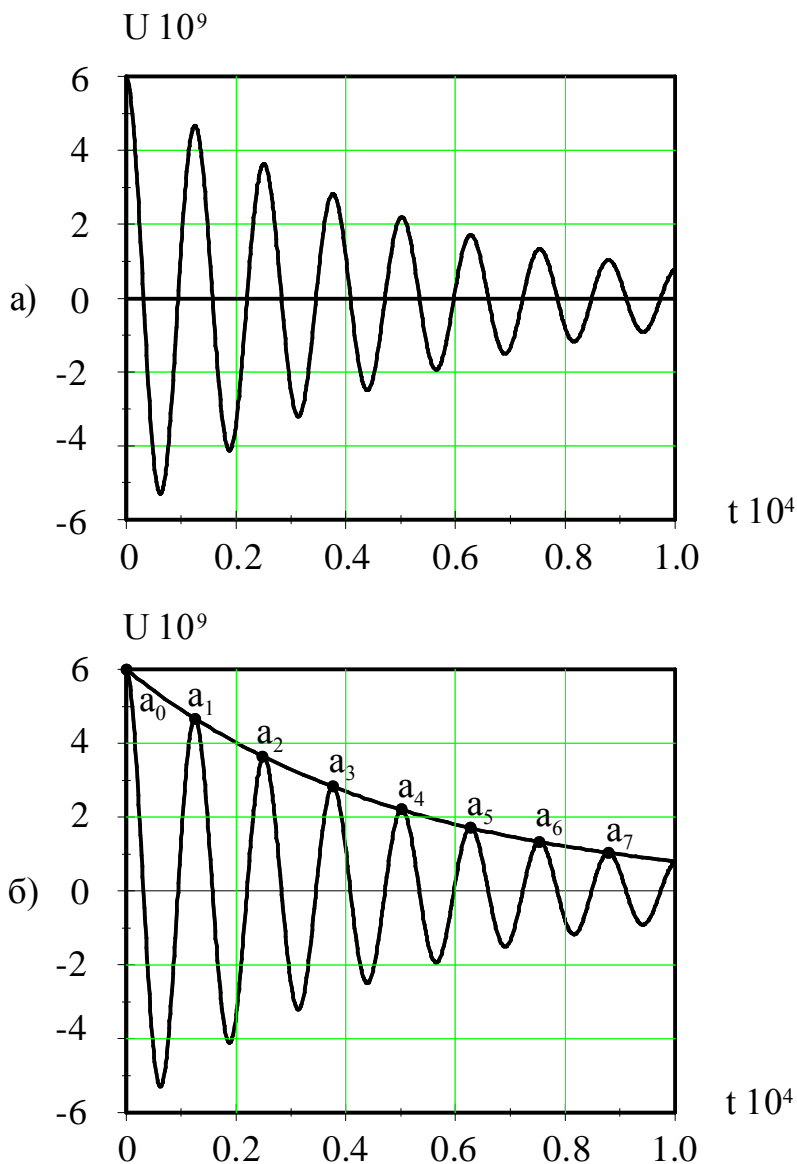


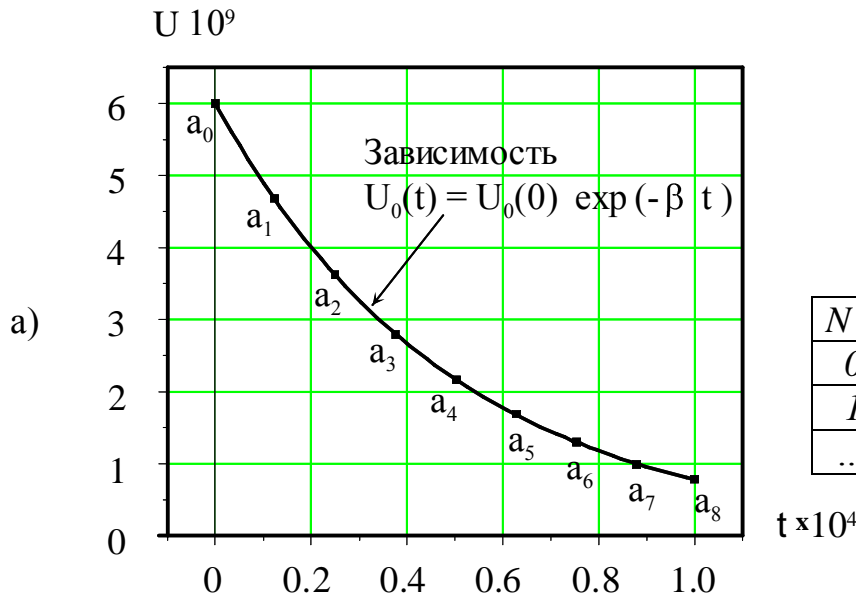
Рис. 4

Наблюдение формы колебаний напряжения на конденсаторе  $C$  в схеме (рис. 3) показывает, что она имеет вид, представленный на рис. 4а. Как видно из рисунка колебания остаются косинусоидальными, но амплитуда колебаний убывает со временем  $U_C = U_0(t) \cos(\omega t + \varphi_0)$ .

На рис. 4б через точки  $a_0 \dots a_7$  проведена плавная кривая, форма которой определяет зависимость  $U_0(t)$ . Для того, чтобы записать предполагаемое решение уравнения (7), найдем аналитический вид зависимости  $U_0(t)$ .

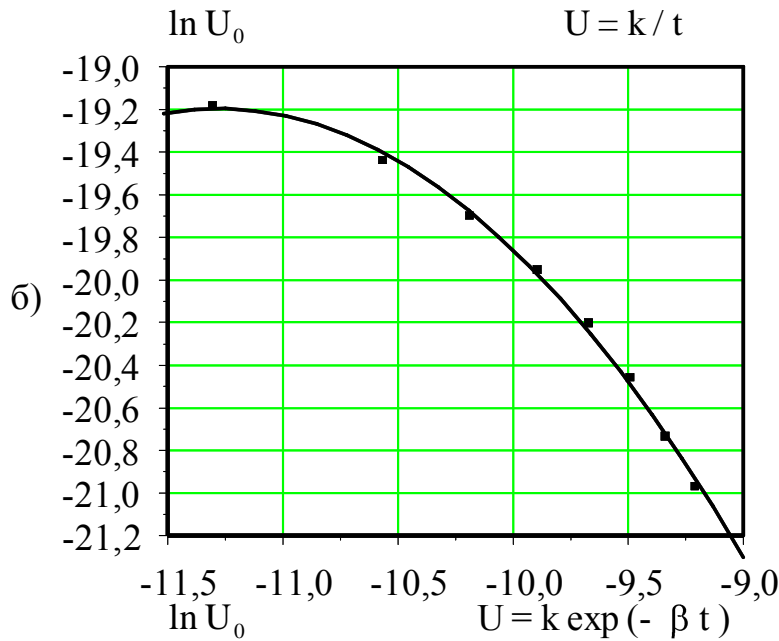
Точки  $a_0 \dots a_7$  определяют амплитуды колебаний напряжения в различные моменты времени. С помощью рис. 4б можно создать таблицу значений напряжений в точках

$a_0 \dots a_7$  .

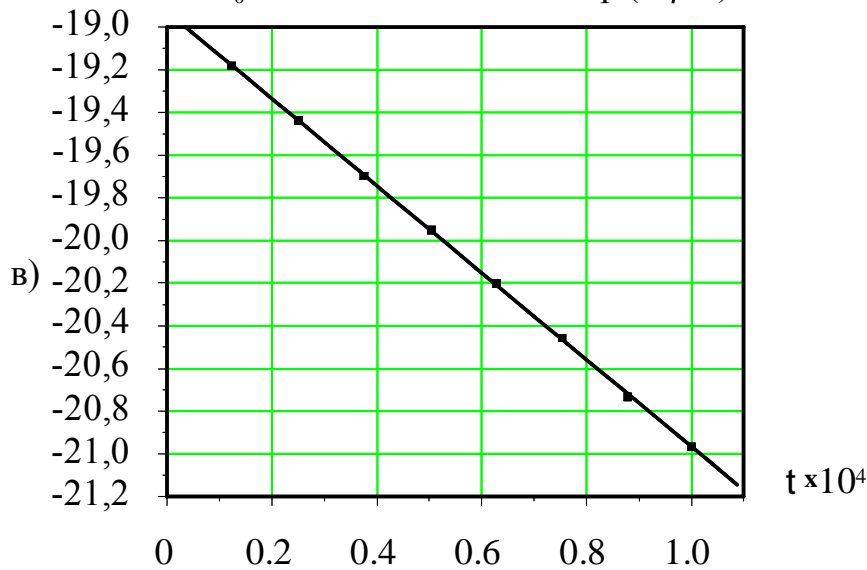


Данные этой таблицы определяют зависимость  $U_0(t)$  в табличной форме (точки на графике рис. 5а).

$N$	$U_{0i}$	$t_i$
0		
1		
...		



В частном случае найти аналитическую зависимость  $U_0(t)$  можно путем подбора функции, которая при заданных в таблице значениях аргумента  $t_i$  давала бы табличные значения  $U_{0i}$ .



Проверим, насколько подходят для описания плавной кривой, представленной на рис. 4б, следующие функции:

$$U_0(t) = \frac{U_0 \cdot 0}{t}$$

$$\text{и } U_0(t) = U_0 \cdot 0 \exp(-\beta t).$$

Обе функции отражают убывание  $U_0(t)$ , но закон убывания разный.

Вычислим логарифмы левых и правых частей приведенных выражений:

$$\ln U_0(t) = \ln U_0 \cdot 0 - \ln t,$$

$$\ln U_0(t) = \ln U_0 \cdot 0 - \beta t \text{ и}$$

отобразим эти

Рис. 5

зависимости на графиках. Первый график построим в координатах  $\ln U_0 \rightarrow \ln t$ , второй - в координатах  $\ln U_0 \rightarrow t$ . Если функция правильно описывает зависимость  $U_0(t)$ , то точки на графике этой функции должны располагаться на прямой линии. Как видно из рисунков 5б и 5в на прямую линию легли точки, соответствующие функции  $U_0(t) = U_0 \exp(-\beta t)$ , (рис. 5в). Следовательно, именно эта функция описывает зависимость амплитуды колебаний от времени. Тангенс угла наклона прямой равен  $\beta$ .

На рис. 5а представлен график функции  $U_0(t) = U_0 \exp(-\beta t)$  (сплошная линия). Как видно из рисунка все экспериментальные точки  $a_0, a_1, a_2 \dots a_7$  хорошо ложатся на эту линию.

Так как вид зависимости напряжения и заряда на обкладках конденсатора одинаков ( $U = q / C$ ), то решение уравнения (7) ищем в виде

$$q = q_0 \exp(-\beta t) \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (8)$$

Функция (8) является решением уравнения (7), если

$$\beta = \frac{R}{2L} \quad (9)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (10)$$

В справедливости этого решения можно убедиться, подставив в (7) выражение (8), приняв во внимание (9) и (10). При этом левая часть уравнения (7) окажется тождественной правой.

Таким образом, собственные колебания заряда на обкладках конденсатора в реальном контуре происходят по закону (8) с  $\beta$  и  $\omega$ , определяемыми формулами (9) и (10).

### б) Декремент затухания

Колебания, закон которых выражается формулой (8), уже не будут гармоническими. В формулу (8) входят два множителя, зависящие от времени. Один из них  $\cos(\omega t + \varphi_0)$  - является периодической функцией времени, а другой -  $e^{-\beta t}$  с течением времени убывает. При  $\beta \rightarrow 0$  решение (8) переходит в формулу (5), описывающее незатухающие собственные колебания. При  $\omega_0 < \beta$  имеет место аperiодический режим, т.е. величина заряда на конденсаторе уменьшается монотонно со временем, не совершив ни одного колебания. Если  $\omega_0 > \beta$ , то величину  $q_1 = q_0 e^{-\beta t}$  можно считать амплитудой, которая уменьшается с течением времени по показательному (экспоненциальному) закону. Колебания с убывающей амплитудой называются затухающими колебаниями. Величина  $\beta$ , называемая коэффициентом затухания, имеет простой физический смысл: величина обратная  $\beta$ , а именно,  $\frac{1}{\beta}$ , определяет время  $\tau$ , в течении которого амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз.

Количественной характеристикой затухающих колебаний является декремент затухания. С целью определения этой величины найдем отношение значений  $q(t)$  и  $q(t+T)$ . Учитывая периодичность  $\cos(\omega t + \varphi_0)$ , получим

$$\Delta = \frac{q(t)}{q(t+T)} = \frac{q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)}{q_0 e^{-\beta(t+T)} \cos(\omega t + \varphi_0)} = e^{\beta T} . \quad (11)$$

Из (11) следует, что отношение двух последовательных амплитуд, т.е. амплитуд, взятых через промежуток времени, равный  $T$ , не зависит от времени, а зависит только от характеристик колебательного контура -  $R, L, T$ .

Это отношение называется декрементом затухания. Чем больше декремент затухания, тем быстрее уменьшается амплитуда. Часто затухание характеризуют натуральным логарифмом этого отношения:

$$\delta = \ln e^{\beta T} = \beta T \quad (12)$$

Величина  $\delta$  называется логарифмическим декрементом затухания. Выясним физический смысл этой величины. Как было показано выше, за время  $\tau = \frac{1}{\beta}$  амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз. За это время

колебательный контур совершит  $N = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T} = \frac{1}{\delta}$  колебаний. Таким образом, величина, обратная логарифмическому декременту колебаний определяет число колебаний, которое колебательный контур совершит за время уменьшения его амплитуды колебаний в  $e$  раз.

Для характеристики колебательного контура часто используют величину  $Q$ , называемую добротностью колебательного контура. Добротность колебательного контура при малых потерях энергии в контуре определяется соотношением

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W} \quad (13)$$

где  $W$  - полная энергия в контуре, а  $\Delta W$  - энергия, рассеянная в контуре в течение времени, равного периоду колебаний. Полная энергия контура и потери энергии за период равны соответственно  $W = \frac{LI_0^2}{2}$  и  $\Delta W = RI_{\text{эфф}}^2 T$ ,

где  $I_0$  - амплитудное, а  $I_{\text{эфф}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$  - эффективное значение тока в контуре.

Подставляя  $W$  и  $\Delta W$  в (13), получим

$$Q = \frac{2\pi W}{\Delta W} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi}{\delta} . \quad (14)$$



В реальных колебательных контурах коэффициент затухания  $\beta$  обычно настолько мал по сравнению с частотой собственных колебаний  $\omega_0$ , что в формуле (12) можно пренебречь зависимостью периода  $T$  от  $\beta$ . Тогда находим

$$\delta = \beta T = \beta \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \approx \beta \frac{2\pi}{\omega_0} = \beta T_0. \quad (15)$$

Подставляя (9) и (6) в (15) получаем новые выражения для логарифмического декремента затухания и добротности:

$$\delta = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (16)$$

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (17)$$

Отметим, что добротность используемых в радиотехнике колебательных контуров может достигать нескольких сотен.

### §3 Вынужденные электрические колебания

Колебания, которые происходят в электрическом контуре под действием периодически изменяющейся электродвижущей силы (ЭДС), называются вынужденными колебаниями. В случае свободных колебаний амплитуда и начальная фаза определяются начальными условиями, а частота зависит только от свойств самой системы (ее параметров  $L$ ,  $C$  и  $R$ ). Как показывает

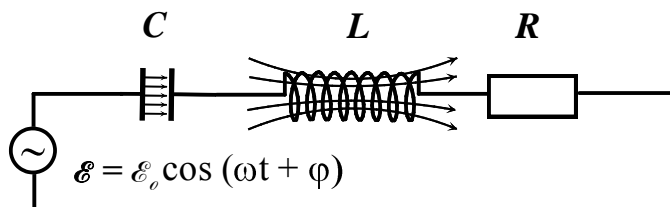


Рис. 6

опыт, частота вынужденных колебаний определяется частотой вынуждающей силы. Поэтому можно предположить, что, если в цепи контура действует ЭДС, изменяющаяся по гармоническому закону

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi), \text{ то колебания в}$$

контуре будут происходить с той же частотой  $\omega$ .

Рассмотрим вынужденные колебания, возникающие при включении источника переменной ЭДС последовательно с элементами колебательного контура (рис. 6). Предположим, что ЭДС изменяется по гармоническому закону:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (18)$$

Тогда сумма падений напряжений на конденсаторе  $U_C = \frac{q}{C}$ , индуктивности

$U_L = \mathcal{E}_L = -\frac{di}{dt}$  и активном сопротивлении  $U_R = Ri$  по второму правилу

Киргофа равна внешней ЭДС:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \quad (19)$$

Используя введенные ранее стандартные обозначения (4) и (9) перепишем (19) в виде:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \cos \omega t. \quad (20)$$

Покажем, что этому уравнению удовлетворяет функция,

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t + \alpha), \quad (21)$$

описывающая гармоническое колебание с частотой внешней ЭДС. В этой функции  $\alpha$  представляет собой разность фаз колебаний заряда и внешней ЭДС. Подставим в (20) функцию (21), а также ее производные:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= -\omega q_0 \sin(\omega t + \alpha), \\ \frac{d^2 q}{dt^2} &= -\omega^2 q_0 \cos(\omega t + \alpha). \end{aligned}$$

В результате подстановки получим соотношение:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)q_0 \cos(\omega t + \alpha) - 2\omega\beta q_0 \sin(\omega t + \alpha) = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \cos \omega t.$$

Это равенство должно выполняться при любом  $t$ . Раскрывая  $\cos(\omega t + \alpha)$  и  $\sin(\omega t + \alpha)$  и приравнявая коэффициенты при  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$  в левой и правой частях равенства, находим:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)q_0 \cos \alpha - 2\omega\beta q_0 \sin \alpha = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \quad (22)$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)q_0 \sin \alpha + 2\omega\beta q_0 \cos \alpha = 0. \quad (23)$$

Из (23) получаем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\omega\beta}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (24)$$

Возводя в квадрат (22) и (23) и складывая результат, находим:

$$q_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \beta^2}}. \quad (25)$$

Таким образом, при наличии в контуре последовательно включенного генератора, ЭДС которого изменяется во времени по гармоническому закону (18), возникают установившиеся гармонические вынужденные колебания (21) с частотой внешней ЭДС  $\omega$ . Вначале процесса одновременно с вынужденными колебаниями возникают собственные колебания, которые складываются с вынужденными колебаниями. Однако, из-за наличия затухания собственные колебания постепенно затухают. Амплитуда колебаний (25) и сдвиг фаз между вынужденными колебаниями и колебаниями ЭДС генератора (24) зависят от параметров самого контура  $R, L, C$  и величин, определяющих внешнюю ЭДС -  $\omega, \varepsilon_0$ . Из формулы (25)

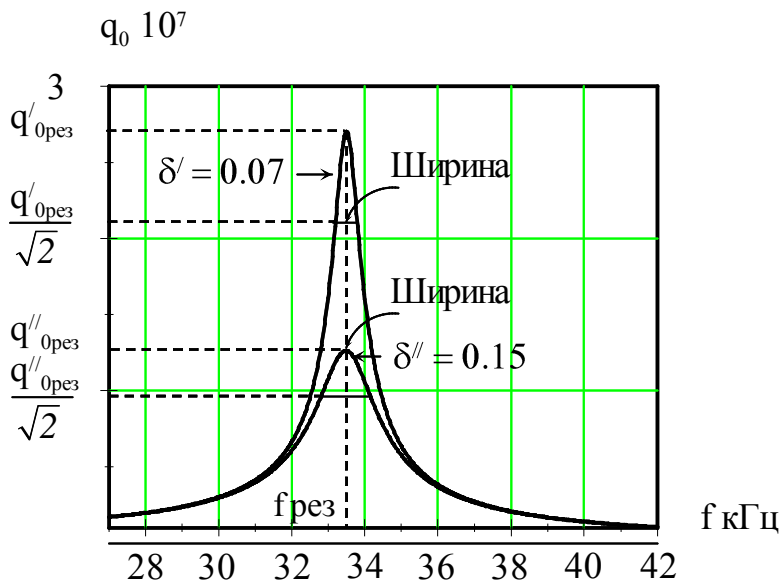


Рис. 7

видно, что амплитуда вынужденных колебаний  $q_0$  пропорциональна амплитуде внешней ЭДС  $\varepsilon_0$  и зависит от соотношения между собственной частотой колебаний контура  $\omega_0$  и частотой внешней ЭДС  $\omega$ .

Рассмотрим эту зависимость подробнее. Когда частота генератора стремится к нулю (очень медленные колебания), амплитуда вынужденных колебаний стремится к

величине  $q_0 = \frac{\varepsilon_0}{L\omega_0^2}$ . При увеличении  $\omega$  амплитуда  $q_0$  сначала

увеличивается, так как уменьшается знаменатель в формуле (25) (уменьшается величина разности  $\omega_0^2 - \omega^2$ ), до тех пор, пока  $\omega$  не приблизится к  $\omega_0$ . При дальнейшем увеличении  $\omega$  знаменатель в формуле (25) начинает увеличиваться. При этом амплитуда  $q_0$  стремится к нулю при  $\omega$ , стремящейся к бесконечности. На графике зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты генератора изобразится кривой, имеющей максимум вблизи  $\omega = \omega_0$ , рис. 7. Явление, заключающееся в увеличении амплитуды вынужденных колебаний, когда частота внешней ЭДС приближается к собственной частоте системы, называется резонансом, а график зависимости амплитуды от частоты внешней ЭДС – амплитудной резонансной кривой.

При не слишком малых коэффициентах затухания  $\beta$  максимум на амплитудной резонансной кривой лежит не при  $\omega = \omega_0$ . Чтобы найти значение  $\omega$ , при которой величина  $q_0$  является максимальной, можно

воспользоваться тем фактом, что функция имеет максимум в той точке, где ее производная обращается в нуль. Очевидно, что нахождение максимума для функции  $q_0$  сводится к нахождению минимума знаменателя (25). Поэтому, продифференцировав подкоренное выражение (25) по  $\omega$  и приравняв результат нулю, находим:

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} . \quad (26)$$

Можно также показать, что когда затухание мало, амплитуда имеет максимальное значение

$$q_{0рез} = \frac{\mathcal{E}_0}{2L\omega_0\beta} . \quad (27)$$

Отсюда видно, что  $q_{0рез}$  обратно пропорциональна коэффициенту затухания  $\beta$ . Если бы мы не принимали во внимание затухание ( $\beta = 0$ ) при выводе формулы (25), то мы получили бы, что при резонансе амплитуда становится бесконечной (нуль в знаменателе формулы (27), чего на самом деле никогда не бывает).

Если увеличить коэффициент затухания, не изменяя остальных параметров контура и ЭДС, то резонансная кривая на графике (рис. 7) пойдет ниже. Резонанс становится менее резко выраженным. При очень большом затухании максимум вообще исчезает.

Затухание в колебательном контуре характеризуют также шириной  $\Delta\omega$  резонансной кривой на высоте  $\frac{q_{0рез}}{\sqrt{2}}$ . Можно показать, что ширина кривой  $\Delta\omega$  на этой высоте приблизительно равна  $2\beta$ . Величина  $\Delta\omega = 2\beta$  называется шириной резонансной кривой или полосой пропускания. Так как  $Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$  (15), то из (15) следует, что добротность  $Q$  и полоса пропускания  $\Delta\omega$  связаны следующим соотношением:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} . \quad (28)$$

Определим теперь величину напряжения на конденсаторе:  $U = \frac{q}{C}$ .

Используя (21), находим  $U = U_0 \cos(\omega t + \alpha)$ , где  $U_0 = \frac{q_0}{C}$  - амплитуда напряжения на конденсаторе. Во время резонанса  $U_0$  принимает значение

$$U_{0рез} = \frac{\omega_0^2 \mathcal{E}_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2 + 4\omega^2 \beta^2}} . \quad (29)$$

Из формулы (29) видно, что амплитуда напряжения на конденсаторе при  $\omega = 0$  равна  $\mathcal{E}_0$ . Этот факт имеет простой физический смысл, поскольку случай  $\omega = 0$  соответствует не зависящей от времени ЭДС, и установившееся напряжение на конденсаторе должно равняться ее значению  $\mathcal{E}_0$ .

В условиях резонанса  $\omega \approx \omega_0$  и при малых  $\beta$  амплитуда напряжения равна:

$$U_{0\text{рез}} = \frac{\omega_0 \epsilon_0}{2\beta} . \quad (30)$$

Так как при малых  $\beta$   $Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$ , то

$$U_{0\text{рез}} = \frac{\omega_0 \epsilon_0}{2\beta} = Q \epsilon_0 . \quad (31)$$

Таким образом, при резонансе амплитуда напряжения на конденсаторе в  $Q$  раз больше, чем амплитуда внешней ЭДС.

### Ширина резонансной кривой

Рассмотрим резонансную кривую напряжения на конденсаторе вблизи резонанса при малом затухании  $\beta$ , то есть при малых значениях разности  $\omega - \omega_0$ . В этом случае  $\omega + \omega_0 \approx 2\omega_0$ , и подкоренное выражение в (29) можно упростить следующим образом:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \beta^2 = [(\omega_0 - \omega)^2 (\omega_0 + \omega)^2 + 4\omega^2 \beta^2] \approx 4[(\omega_0 - \omega)^2 \omega_0^2 + \beta^2 \omega_0^2] .$$

Используя формулу (29), находим:

$$U_{0\text{рез}}^2 = \frac{\epsilon_0^2 \omega_0^2}{4[(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2]} . \quad (32)$$

Определим, при каком значении  $\omega$  квадрат амплитуды напряжения на конденсаторе уменьшается в два раза по сравнению с квадратом его значения при резонансе. Используя (30) и (32) находим условие:

$$\frac{(\omega_0 - \omega)^2 + \beta^2}{\beta^2} = 2 ,$$

которое определяет соответствующее значение частоты  $\omega$ .

Отсюда

$$|\omega_0 - \omega| = \beta . \quad (33)$$

Итак, при отклонении частоты на величину  $\pm\beta$  от резонансного значения  $\omega_0$ , квадрат амплитуды напряжения на конденсаторе уменьшается в два раза.

Величина  $\Delta\omega = 2\beta$  называется «шириной резонансной кривой на уровне  $1/2$ » или *полосой пропускания*. Таким образом мы показали, что формула

(28)  $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$ , действительно, справедлива.

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Целью работы является: изучение вынужденных колебаний в электрическом колебательном контуре и измерение основных его параметров.

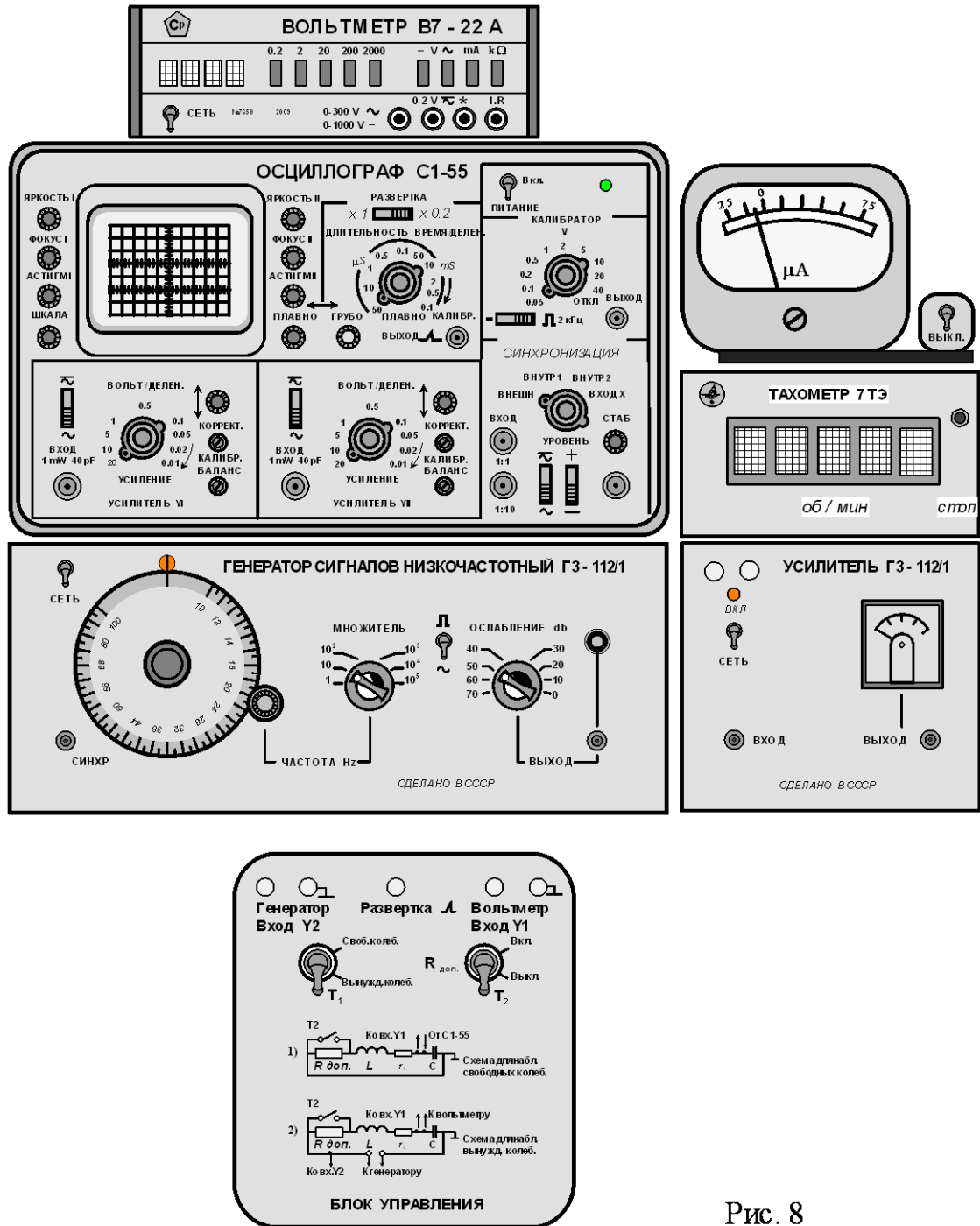


Рис. 8

## Состав приборов экспериментальной установки

Общий вид установки представлен на рис. 8.

Как видно из рисунка установка состоит из блока управления, двухлучевого осциллографа *С1-55*, низкочастотного генератора *ГЗ-112/1* с усилителем, частотомера - *ТАХОМЕТРА 7ТЭ* и цифрового вольтметра *В7-22А*.

## **I. Блок управления**

В блоке управления находится колебательный контур и два переключателя  $T_1$  и  $T_2$  для выбора режима измерений. Подключение блока к измерительным приборам производится согласно надписям под электрическими гнездами (схема соединений приборов дана в приложении). Электрические схемы колебательного контура находятся на верхней панели блока. Переход от одной схемы измерений к другой осуществляется путем переключения тумблера  $T_1$ . Тумблер  $T_2$  используется для включения в контур дополнительного сопротивления. В режиме вынужденных колебаний на колебательный контур поступает напряжение синусоидальной формы от генератора  $G3 - 112A$ . Одновременно это напряжение подается на вход осциллографа  $Y2$ . В силу технических причин на установке № 1 это напряжение подводится ко входу усилителя  $Y1$ . Напряжение вынужденных колебаний с конденсатора  $C$  контура поступает на вход  $Y1$  осциллографа (на установке № 1 на вход  $Y2$ ) и вход цифрового вольтметра  $B7 - 22A$ .

## **II. Двухлучевой осциллограф $С1 - 55$**

Малогабаритный двухлучевой осциллограф  $С1 - 55$  предназначен для одновременного наблюдения двух электрических процессов и измерения их временных и амплитудных характеристик.

### **1) Блоки входных усилителей**


Исследуемые сигналы подаются на входные гнезда двух вертикальных, независимых усилителей *УСИЛИТЕЛЬ  $Y1$*  и *УСИЛИТЕЛЬ  $Y2$*  (рис.8). Удобную для наблюдения величину сигнала устанавливают с помощью ступенчатых переключателей *ВОЛЬТ / ДЕЛЕНИЕ*. Числа на шкалах рядом с переключателями соответствуют напряжению в вольтах, которое отклоняет лучи по вертикали на одно большое деление экранной сетки, т.е. определяют чувствительность по вертикали. На осях ступенчатых переключателей *ВОЛЬТ / ДЕЛЕНИЕ* находятся малые ручки *УСИЛЕНИЕ* для плавной регулировки входных сигналов. Установленная ступенчатым переключателем чувствительность соответствует своему значению только в том случае, если ручка плавной регулировки повернута по часовой стрелке до упора. Ручки с вертикальными стрелками "↕" служат для независимого смещения лучей по вертикали. Регулировки *КАЛИБР* и *БАЛАНС* используются для предварительной настройки усилителей, студентам трогать их **запрещается**.

### **2) Блок электроннолучевой трубки (ЭЛТ)**


К регулировкам электроннолучевой трубки относятся ручки *ЯКОСТЬ 1,2*, *ФОКУС 1,2* и *АСТИГМ 1,2*. Две последние ручки предназначены для фокусировки и устранения искажений изображения на экране ЭЛТ. К общим регулировкам относятся ручка *ШКАЛА* для регулировки подсветки шкалы и две ручки « ← » *ПЛАВНО* и *ГРУБО* для смещения изображения по горизонтали.

### 3) Блок развертки

Блок развертки предназначен для изменения длительности развертки, что производится с помощью следующих регулировок:

а) Переключателя  $\times 1$    $\times 0.2$  для уменьшения длительности развертки в пять раз во всех возможных диапазонах.

б) Ручки ступенчатого переключения длительности развертки **ДЛИТЕЛЬНОСТЬ ВРЕМЯ / ДЕЛЕН**.

в) Малой ручки **ПЛАВНО**, находящейся на оси переключателя **ДЛИТЕЛЬНОСТЬ ВРЕМЯ / ДЕЛЕН**, для плавного изменения длительности. Числа на шкале рядом с переключателем **ДЛИТЕЛЬНОСТЬ ВРЕМЯ / ДЕЛЕН** соответствуют времени смещения в  $\mu S$  или в  $mS$  луча в горизонтальном направлении на одно большое деление экранной сетки. Время смещения соответствует указанному значению только в том случае, если ручка плавной регулировки повернута по часовой стрелке до упора. Гнездо « выход  » служит для вывода импульсов напряжения.

### 4) Блок КАЛИБРАТОР


Калибратор служит для калибровки коэффициента отклонения усилителей вертикального отклонения и калибровки длительности развертки. При выполнении работы блок **КАЛИБРАТОР** не используется.

### 5) Блок СИНХРОНИЗАЦИЯ

Блок синхронизации управляет работой генератора развертки с целью получения неподвижного изображения исследуемых сигналов на экране ЭЛТ. Переключатель **СИНХРОНИЗАЦИЯ** служит для выбора источника синхронизации: **ВНЕШ.**, **ВНУТР 1**, **ВНУТР 2**, **ВХОД X**. При выполнении данной задачи синхронизация генератора развертки осуществляется исследуемым сигналом от одного из каналов вертикального отклонения **ВНУТР 1** или **ВНУТР 2**. Малая ручка **УРОВЕНЬ** на оси переключателя **СИНХРОНИЗАЦИЯ** служит для выбора уровня напряжения запуска развертки. Ручка **СТАБ** используется для выбора режима работы генератора развертки «ждущий, автоколебательный».

## III. Генератор и усилитель сигналов ГЗ – 112/1

Генератор сигналов **ГЗ – 112/1** является источником напряжения синусоидальной и прямоугольной формы. Выбор формы

генерируемого напряжения производится тумблером . Напряжение

синусоидальной формы с разъема **ВЫХОД** помимо колебательного контура через делитель напряжения поступает на вход усилителя **ГЗ – 112/1**. Частота выходного напряжения изменяется ступенчато с помощью ручки **МНОЖИТЕЛЬ** и плавно с помощью малой ручки, находящейся во фрикционном зацеплении с лимбом отсчета частоты. Над верхним концом вертикального диаметра лимба находится подсвечиваемая риска для отсчета частоты. Если напротив этой риски, например, установлена отметка лимба с



цифрой 32, а ступенчатый переключатель *МНОЖИТЕЛЬ* находится в положении  $10^3$ , то частота напряжения на разъеме *ВЫХОД* равна  $32 \times 10^3 \text{ Гц}$ . Регулировка уровня выходного напряжения осуществляется с помощью ступенчатого переключателя *ОСЛАБЛЕНИЕ db* и ручки плавной регулировки, расположенной над гнездом *ВЫХОД*. Стрелочный прибор на верхней крышке частотомера-ТАХОМЕТРА 7 ТЭ служит для контроля уровня выходного напряжения генератора.

#### IV. Частотомер –ТАХОМЕТР 7ТЭ

Цифровой частотомер – *ТАХОМЕТР 7 ТЭ* служит для точного измерения частоты напряжения, поступающего на его *ВХОД* от генератора ГЗ – 112/1. Кнопка *СТОП* при выполнении работы не используется.

#### V. Цифровой вольтметр В7–22А

Цифровой вольтметр *В7 – 22А* является многофункциональным измерительным прибором. В условиях данной задачи он служит для измерения уровня переменного напряжения на конденсаторе колебательного контура. Измеряемое напряжение подводится к гнездам, отмеченным символами « 0-300 V ~ » и « \* ».   
 0-1000 V –

### ПОДГОТОВКА УСТАНОВКИ К РАБОТЕ

Как правило, установку к работе готовит лаборант. Студент, выполняя работу, производит только те регулировки, которые необходимы в процессе ее выполнения. Об этих регулировках говорится в описании. Поэтому перечисленные ниже операции студент выполняет только по указанию преподавателя.

#### I. Блок управления


1. Тумблер  $T_1$  установить в положение *ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ*.
2. Тумблер  $T_2$  - в положение  $R_{дон.} = \text{ВЫКЛ.}$


#### II. Осциллограф С1 – 55

1. Ступенчатые переключатели *ВОЛЬТ – ДЕЛЕН.* в блоках *УСИЛИТЕЛЬ У1* и *УСИЛИТЕЛЬ У2* установить в рабочее положение согласно таблице 1. Ручки плавной регулировки *УСИЛЕНИЕ* повернуть по часовой стрелке до упора.


Таблица 1

Номер установки	1	2	3	4
Вход У1	10	10	5	5
Вход У2	5	10	10	10

2. Переключатели  в блоках усилителей  $Y1$  и  $Y2$  установить в положение  $\sim$ .

3. Ступенчатый переключатель *ДЛИТЕЛЬНОСТЬ ВРЕМЯ / ДЕЛЕНИЕ* в блоке *РАВЕРТКА* установить в положение  $20 \mu S$ , а ручку регулировки *ПЛАВНО* повернуть по часовой стрелке до упора.
4. Переключатель  $\times 1$    $\times 0.2$  установить в положение  $X1$ .
5. Переключатель *СИНХРОНИЗАЦИЯ* в блоке синхронизация установить в положение *ВНУТР. 2* (на установке № 1 – в положение *ВНУТР. 1*). Ручку *СТАБ* повернуть против часовой стрелки до упора.
6. Ручку подсветки *ШКАЛА* повернуть по часовой стрелке до упора.
7. Ручки регулировки *ЯРКОСТЬ 1,2* и *ФОКУС 1,2* установить в среднее положение.

### III. Генератор сигналов ГЗ – 112/1

1. Переключатель формы генерируемых колебаний  установить в положение  $\sim$ .
2. Ручку ступенчатого переключения частоты *МНОЖИТЕЛЬ* установить в положение  $10^3$ .
3. Отметку на лимбе установки частоты с цифрой 32 установить против подсвечиваемой риски.
4. Ручку ступенчатой регулировки выходного напряжения *ОСЛАБЛЕНИЕ db* установить в положение 0.
5. Ручку плавной регулировки выходного напряжения повернуть против часовой стрелки до упора.

### IV. Цифровой вольтметр В7 – 22А

Поставить органы управления вольтметром в исходное положение:

1. Нажать кнопку выбора режима измерения «  $V \sim$  ».
2. Нажать кнопку выбора диапазона измерений « 20 ».

## ВКЛЮЧЕНИЕ УСТАНОВКИ

1. Тумблером *СЕТЬ* включить генератор сигналов ГЗ – 112А.
2. Тумблером с тем же названием включить усилитель ГЗ – 112А.
3. Ручкой плавной регулировки выходного напряжения генератора установить указатель стрелочного прибора на частотомере-тахометре в положение, указанное для данной установки в таблице 2.

Таблица 2

<i>Установка, №</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>
<i>Положение стрелки, дел.</i>	<i>45</i>	<i>30</i>	<i>40</i>	<i>40</i>

4. Включить частотомер – *ТАХОМЕТР 7 ТЭ*. Тумблер *ВКЛ.* находится на задней стенке корпуса справа. Ручку тумблера двигать в горизонтальной плоскости. На пятиразрядном табло высветится результат измерения частоты генератора.
5. Тумблером *СЕТЬ* включить цифровой вольтметр *В7 – 22А*. На индикаторе вольтметра отразится результат измерения напряжения на конденсаторе колебательного контура.
6. Установить тумблер *ПИТАНИЕ* осциллографа *С1 – 55* в положение *ВКЛ.* Рядом с тумблером загорится индикатор включения.
7. Медленно поворачивая по часовой стрелке ручку *СТАБ* в блоке *СИНХРОНИЗАЦИЯ*, добиться появления на экране *ЭЛТ* изображения колебаний. Как правило, изображение не стабильно (перемещается по экрану) и представляет собой набор синусоид (возможно, не четкое).
8. С помощью ручек управления лучом по вертикали и горизонтали каналов *У1* и *У2* добиться такого расположения изображения, чтобы осциллограмма колебаний генератора располагалась ниже осциллограммы колебаний в контуре. Ручками регулировки напряжения *ПЛАВНО* добиться того, чтобы первое изображение занимало одно большое деление сетки, а второе оставшееся место на экране *ЭЛТ*.
9. С помощью ручек *ФОКУС* и *АСТИГМ.* добиться четкой фокусировки изображения на экране *ЭЛТ*.
10. С помощью ручек *СТАБ* и *УРОВЕНЬ* в блоке *СИНХРОНИЗАЦИЯ* добиться полной (во всем рабочем диапазоне частот) синхронизации изображения. Однозначно описать порядок выполнения этой операции невозможно. Можно только рекомендовать медленно и попеременно вращать ручки *СТАБ* и *УРОВЕНЬ*, наблюдая за поведением изображения. В момент стабилизации изображение резко останавливается. При изменении частоты генератора стабилизация часто нарушается, но легко восстанавливается. Процесс стабилизации занимает какое-то время.

После полной стабилизации, когда изменение частоты работы генератора во всем диапазоне не приводит к движению изображения по экрану *ЭЛТ*, можно приступить к измерениям.

# ПРОВЕДЕНИЕ ИЗМЕРЕНИЙ

## Упражнение ИЗМЕРЕНИЕ ЗАВИСИМОСТИ АМПЛИТУДЫ КОЛЕБАНИЙ НАПРЯЖЕНИЯ НА ЕМКОСТИ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО КОНТУРА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЧАСТОТЫ ВНЕШНЕЙ ЭДС

Диапазон рабочих частот для всех установок находится в интервале (20 – 45) кГц. При изменении частоты возможны небольшие изменения напряжения на колебательном контуре. За этими изменениями необходимо следить, наблюдая за показаниями стрелочного прибора на частотомер-тахометре, и после каждого изменения частоты ручкой плавной регулировки выхода генератора ГЗ – 112А возвращать стрелку в исходное положение.

Интервал между точками измерения разный. По краям диапазона, где наклон кривой небольшой, он равен, приблизительно, 2 кГц, а в области резонанса составляет ~250 Гц. Рекомендуемые для измерения частоты указаны в таблице 3.

Таблица 3

№	$f, \text{Гц}$	$U'_{\text{эфф}}, \text{В}$	$U'_{\text{ампл}}, \text{В}$	$U''_{\text{эфф}}, \text{В}$	$U''_{\text{ампл}}, \text{В}$
1	20000				
2	22000				
3	24000				
4	26000				
5	28000				
6	30000				
7	30500				
8	$f_{\text{рез}} - 1000$				
9	$f_{\text{рез}} - 500$				
10	$f_{\text{рез}} - 250$				
11	$f_{\text{рез}}$				
12	$f_{\text{рез}} + 250$				
13	$f_{\text{рез}} + 500$				
14	$f_{\text{рез}} + 1000$				
15	34000				
16	34500				
17	35000				
18	37000				
19	39000				
20	41000				
21	43000				
22	45000				

## Измерения

1. Медленно уменьшая или увеличивая частоту генератора, найти резонансную частоту контура  $f_{рез}$ . О наступлении резонанса можно судить либо по изменению амплитуды колебаний на экране осциллографа, либо по показаниям цифрового вольтметра.
2. Вычислить частоты колебаний для строк 8-10 и 12-14. Результаты вычислений записать в таблицу 3. Частоту  $f_{рез}$  в таблицу не записывать, а в процессе дальнейших измерений отыскать ее вновь. Это связано с тем, что заданное значение частоты бывает трудно установить точно.
3. Установить первое значение частоты из таблицы 3, скорректировать показания стрелочного прибора и записать  $U'_{эфф}$  (показание цифрового вольтметра В7 – 22А) в таблицу 3. Частоту допустимо устанавливать с отклонением  $\pm 100$ Гц.
4. Далее, не меняя частоты, переключить тумблер  $T_2$  в БЛОКЕ УПРАВЛЕНИЯ в положение ВКЛ., измерить и записать в таблицу 3 напряжение  $U''_{эфф}$ , при большем сопротивлении в цепи колебательного контура, не забыв перед этим обратить внимание на показания стрелочного прибора и скорректировать его показания, если они изменились.
5. Перейти к новому значению частоты и выполнить измерения  $U'_{эфф}$  и  $U''_{эфф}$  в обратном порядке.

После завершения измерений перейти к обработке результатов и составлению отчета. При вычислениях использовать значения индуктивностей  $L$ , приведенные в таблице 4.

Таблица 4

№ установки	1	2	3	4
$L, мГн$	5,071	4,965	5,166	4,892

## ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ И СОСТАВЛЕНИЕ ОТЧЕТА

1. Вычислить электрическую емкость колебательного контура  $C = \frac{1}{L\omega_{рез}^2} = (... \pm ...) нФ, \varepsilon_C = ...\%$ ,  $\omega_{рез} = 2\pi f_{рез}$ .  $1 нФ$  (нанофарада) =  $10^{-9} Ф$ .
2. Вычислить и записать в таблицу 3 амплитудные значения напряжений  $U'_{ампл}$  и  $U''_{ампл}$ ,  $U_{ампл} = \sqrt{2}U_{эфф}$ .
3. Построить на одном листе миллиметровой бумаге резонансные кривые  $U'_{ампл}(f)$  и  $U''_{ампл}(f)$ .

4. Используя резонансные кривые, найти полосы пропускания  $\Delta'f$  и  $\Delta''f$ .
5. Вычислить добротности контура  $Q'$  и  $Q''$ , ( $Q = \frac{f_{рез}}{\Delta f}$ ).
6. Вычислить логарифмические декременты затухания контура  $\delta'$  и  $\delta''$ , ( $\delta = \frac{\pi}{Q}$ ).
7. Вычислить активные сопротивления  $R'$  и  $R''$  колебательного контура, ( $R = \Delta\omega L$ ).

## Приложение

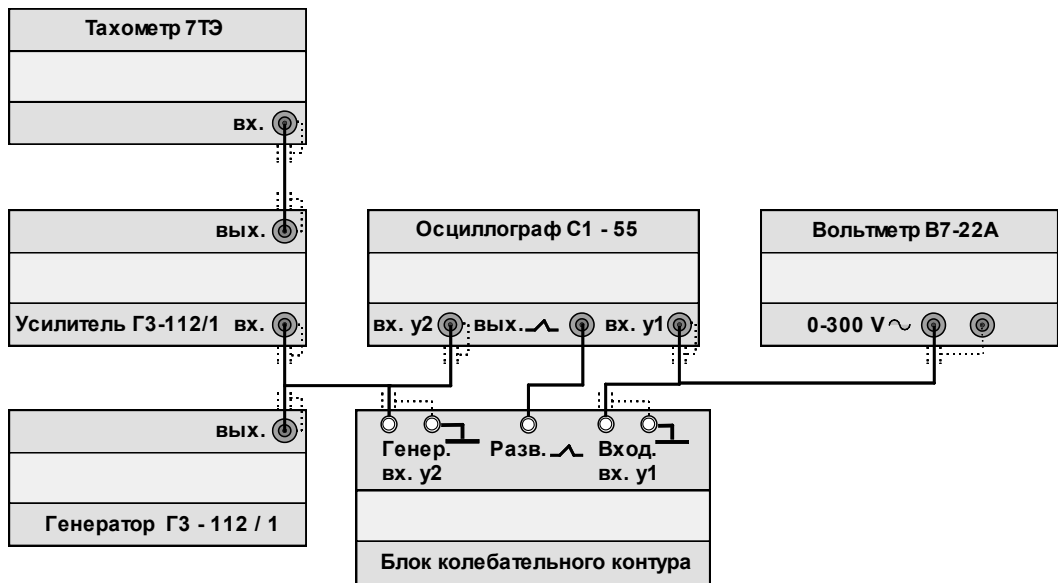
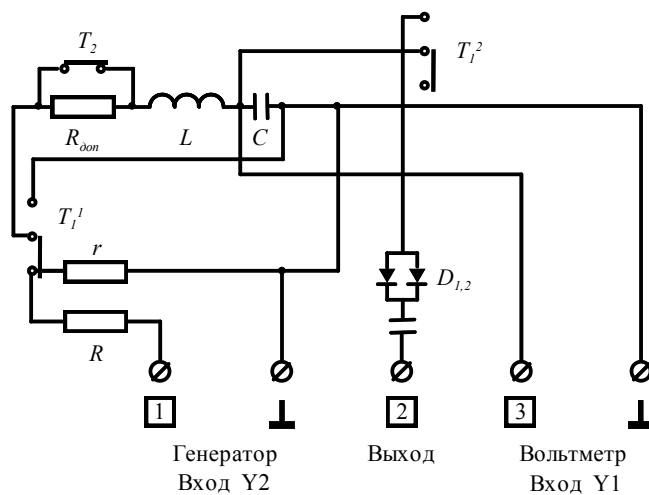


Схема электрических соединений установки, представленной на рис. 8.



Принципиальная схема блока управления в режиме "вынужденные колебания".

## Контрольные вопросы

1. Какие элементы входят в состав колебательного контура?
2. Какими параметрами характеризуется колебательный контур?
3. Добротность колебательного контура. Физический смысл.
4. Вывести формулу для вычисления собственной частоты колебаний идеального колебательного контура.
5. Записать дифференциальное уравнение свободных колебаний с затуханием и общий вид его решения (для заряда  $q$ ).
6. Декремент затухания колебательного контура. Физический смысл.
7. Влияние затухания на частоту собственных колебаний контура.
8. Логарифмический декремент затухания колебательного контура. Физический смысл.
9. Резонанс. Определение.
10. Резонансная кривая. Влияние затухания на резонансную частоту и форму резонансной кривой.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Белов Д.В. «Электромагнетизм и волновая оптика», Издательство Московского университета, 1994 г.  
Глава IV. Законы электрического тока.  
§13 Электрические колебания,  
стр. 102-110.
2. Савельев И.В. «Курс общей физики», книга 2, Электричество и магнетизм. Изд. Москва Наука – Физматлит. 1998 г.  
Глава 13. Электрические колебания.  
13.2 Свободные колебания в контуре без активного сопротивления, стр. 310.  
13.3 Свободные затухающие колебания, стр. 313.  
13.4 Вынужденные электрические колебания, стр. 317.