



где  $\mathbf{L} = J\boldsymbol{\omega}$  – момент импульса,  $J$  – момент инерции,  $\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{F}]$  – момент равнодействующей всех внешних сил.

В декартовой системе координат  $x, y, z$  с началом в центре масс момент силы тяжести относительно центра масс равен нулю. В отсутствие других сил вектор  $\mathbf{L}$  сохраняет свое направление в пространстве, а его модуль равен  $L = \omega J$ , где  $J$  – момент инерции волчка относительно его оси.

Если на такой волчок подействовать постоянной силой  $\mathbf{F}$ , перпендикулярной его оси и направленной вдоль оси  $Oy$  (рис. 8.1), то ее момент будет направлен вдоль оси  $Ox$  и равен  $M = lF$ , где  $l$  – расстояние от ее точки приложения до центра масс. Согласно (8.1) момент силы  $F$  вызовет изменение момента импульса  $\mathbf{L}$ .

Для упрощения расчетов рассмотрим случай «быстрого волчка», когда «продольный» момент импульса вдоль его собственной оси ( $Oz$ ) много больше «поперечных»  $x$ -,  $y$ -компонент. Тогда можно считать, что вектор момента импульса сохраняется по модулю, равному  $\omega J$ , но медленно поворачивается (прецессирует). Поскольку момент сил  $\mathbf{M}$  направлен вдоль оси  $Ox$ , то за бесконечно малое время  $dt$  вектор  $\mathbf{L}$ , получив приращение  $d\mathbf{L}$ , повернется вокруг оси  $Oy$  на угол  $d\varphi$  (рис. 8.1):

$$dL = d\varphi L = M dt.$$

Угловая скорость этого вращения вокруг оси  $Ox$  равна

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L} = \frac{M}{\omega J}. \quad (8.2)$$

Медленное ( $\Omega \ll \omega$ ) равномерное вращение вокруг оси, перпендикулярной оси раскрученного волчка, которое и происходит под действием приложенного момента сил, называется регулярной прецессией. Отметим, что точное решение задачи о движении гироскопа также дает частное решение такого вида, но его реализация требует определенных начальных условий при запуске гироскопа.

### Экспериментальная установка

Конструкция гироскопа показана на рис. 8.2. Вал 2 гироскопа имеет подвижное соединение 11 с опорной стойкой 6, обеспечивающее свободное вращение вокруг вертикальной оси на  $360^\circ$  и наклон в пределах  $\pm 45^\circ$  от горизонтали. На валу 2 закреплен маховик 1, свободно вращающийся в подшипнике. Система уравнивается грузами 7 и 8, закрепляемыми винтами. Винт 9 служит для точной

регулировки. Шкала 10 позволяет измерять отклонение оси от горизонтали.

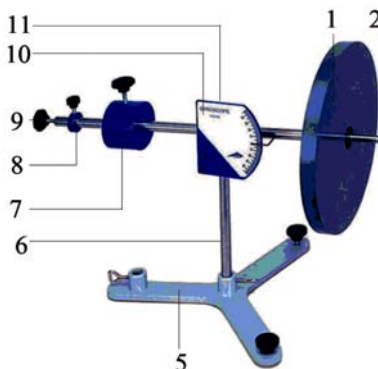


Рис. 8.2. Общий вид гироскопа.

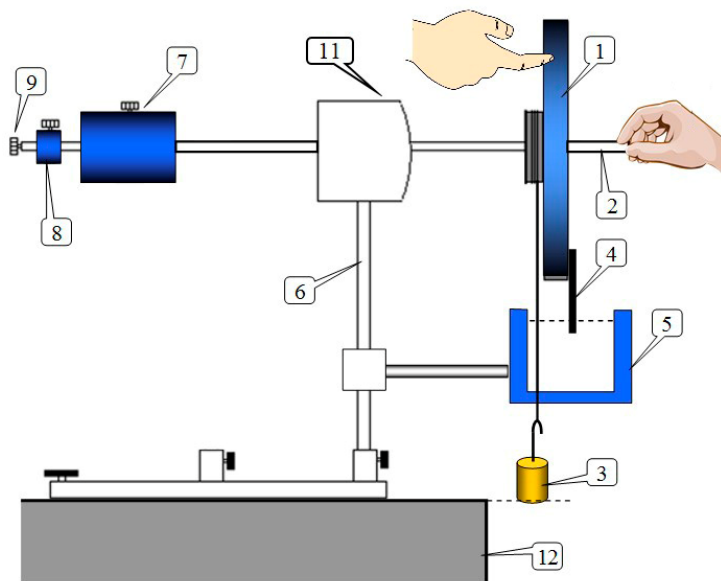


Рис. 8.3. Гироскоп с установленным фотодатчиком и начальное положение системы в упр. 1.

Вид гироскопа сбоку с установленным фотодатчиком показан на рис. 8.3. Фотодатчик 5 фиксируется на стойке 6 и служит для измерения частоты вращения маховика. На маховике закреплен легкий флажок 4, пересекающий луч фотодатчика. Сигнал от датчика поступает на цифровой многофункциональный таймер-частотомер,

который показывает частоту вращения в герцах (или, при желании, период оборота в миллисекундах).

В комплект установки входят также ручной электронный секундомер, грузик 3, привязанный к нити и служащий для раскрутки маховика при измерении его момента инерции в *упр. 1*, и тонкая веревка-нить для раскрутки маховика в *упр. 2*. Общий вид таймера-частотомера представлен в *Приложении 1*.

### Упражнение 1. Измерение момента инерции маховика

В данном упражнении измерения проводятся двумя методами: *динамическим* и *энергетическим*. В обоих случаях маховик раскручивается грузом, подвешенным к нити, навитой на шкив маховика.

**Динамический метод** основан на измерении ускорения груза  $m$  (рис. 8.4). Уравнения, описывающие движение системы без учета трения, имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} ma &= mg - T; \\ J\varepsilon &= rT'; \\ a &= r\varepsilon; \\ T' &= T. \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

Здесь  $a$  – ускорение поступательного движения центра масс груза,  $\varepsilon$  – угловое ускорение маховика,  $J$  – его центральный осевой момент инерции,  $T$  – сила натяжения нити. Третье уравнение – уравнение кинематической связи (при условии нерастяжимости нити). Последнее соотношение является следствием невесомости нити.

Решение этой системы уравнений описывает движение груза с постоянным ускорением

$$a = \frac{g}{1 + J/(mr^2)}.$$

Ускорение можно определить, измерив время  $t$  прохождения грузом известного расстояния  $H$ :

$$a = \frac{2H}{t^2}.$$

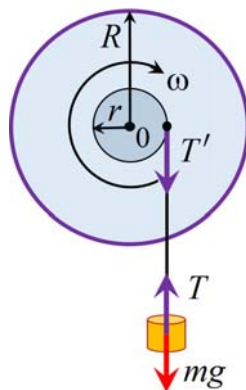


Рис. 8.4. Маховик с подвешенным грузом.

Зная ускорение, можно найти момент инерции по формуле:

$$J = mr^2 \left( \frac{g}{a} - 1 \right) = mr^2 \left( \frac{gt^2}{2H} - 1 \right). \quad (8.4)$$

**Энергетический метод** основан на сохранении механической энергии в отсутствие силы трения. Кинетическая энергия вращающегося маховика и поступательно движущегося груза при его опускании на  $H$  равна убыли потенциальной энергии груза в поле тяжести:

$$\frac{J\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = mgH,$$

где  $\omega$  – угловая скорость маховика,  $v$  – скорость груза. Учитывая кинематическую связь  $v = \omega r$ , для момента инерции  $J$  получаем

$$J = \frac{2mgH}{\omega^2} - mr^2. \quad (8.5)$$

Таким образом,  $J$  можно найти, измерив угловую скорость вращения маховика, приобретенную им при опускании груза с известной высоты  $H$ .

### Измерения

Все электрические соединения на установке выполнены заранее, и установка полностью готова к работе.

Перед началом работы нужно убедиться, что многофункциональный таймер-частотомер включен (светится его индикатор). Установить ручку 15 (выбор режима работы) в режим измерения частоты, при этом должен загореться индикатор диапазона Hz (герцы) (см. **Приложение 1**). Подготовьте к измерениям имеющийся на установке ручной секундомер, установив нуль на его индикаторе.

1. Снимите с оси гироскопа малые грузы 8, 9 и сбалансируйте гироскоп с помощью груза 7. Чтобы избежать повреждения фотодатчика в процессе дальнейшей работы, убедитесь, что закрепленный на маховике флажок перекрывает луч фотодатчика при горизонтальном положении оси гироскопа и не задевает самого фотодатчика при любом отклонении оси *вверх* (в нашем случае именно вверх будет постепенно подниматься маховик в дальнейшем при изучении его прецессии).

2. Для проверки работоспособности установки закрутите маховик рукой, удерживая его ось в горизонтальном положении. На индикаторе таймера должна появиться частота вращения в герцах (число оборотов в секунду).

Ось маховика должна быть неподвижной в горизонтальном положении. Чтобы избежать трудоемкой операции по установке дополнительной стойки, фиксирующей ось гироскопа, и последующего ее удаления, измерения можно выполнить, просто придерживая ось гироскопа рукой в горизонтальном положении, как показано на рис. 8.3.

3. Возьмите нить с закрепленным на ней грузом, вставьте ее свободный конец 1 в радиальное глухое отверстие 2 на шкиве 3 (рис. 8.5). Вращая маховик, аккуратно намотайте нить на шкив так, чтобы подвешенный груз поднялся и своей нижней частью находился на уровне стола 12, как показано на рис. 8.3. Остановитесь в этом положении, придерживая маховик другой рукой. Все эти манипуляции лучше выполнять вдвоем. Длина пути груза будет определяться уровнем поверхности стола 12 над полом.

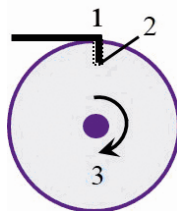


Рис. 8.5. Закрепление нити на шкиве.

4. *Пуск установки.* Измерения по обоим методам проводятся одновременно. Продолжая удерживать рукой ось гироскопа в горизонтальном положении, отпустите маховик и одновременно запустите ручной секундомер. Груз начнет опускаться. В момент касания грузом пола остановите секундомер и сразу запишите показываемую таймером частоту вращения маховика. После того, как нить соскочит со шкива, маховик будет продолжать свободно вращаться, постепенно замедляясь из-за трения в оси. Чтобы долго не ждать, его можно затормозить рукой.

5. Данные измерения повторите еще два раза для дальнейшей статистической обработки. Результаты этих трех измерений занесите в табл. 8.1.

Таблица 8.1.

**Время  $t$  движения груза и частота  $f$  вращения маховика**

$t_1, \text{с}$	$t_2, \text{с}$	$t_3, \text{с}$	$\bar{t}, \text{с}$	$\sigma_t, \text{с}$	$\bar{t}^2, \text{с}^2$	$\sigma_{t^2}, \text{с}^2$	$J, \text{кг}\cdot\text{м}^2$
$f_1, \text{Гц}$	$f_2, \text{Гц}$	$f_3, \text{Гц}$	$\bar{f}, \text{Гц}$	$\sigma_f, \text{Гц}$			$J, \text{кг}\cdot\text{м}^2$
...	...	...					

Масса груза  $m = 50,0 \pm 0.1$  г, длина пути  $H = 91,0 \pm 0.2$  см, радиус шкива  $r = 33,5 \pm 0.1$  мм.

### Обработка результатов

1. По результатам трех измерений ( $n = 3$ ) рассчитайте среднее время движения груза

$$\bar{t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i,$$

его стандартную погрешность

$$\sigma_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}$$

и запишите их в табл. 8.1.

2. Аналогично рассчитайте среднюю частоту вращения маховика  $\bar{f}$  и ее стандартную погрешность  $\sigma_f$ . Результаты запишите в табл. 8.1.

3. По формулам (8.4) и (8.5) найдите значения момента инерции маховика  $J$ , учитывая, что  $\omega = 2\pi f$ ,  $g = 9,801$  м/с<sup>2</sup>. По формуле для косвенных измерений рассчитайте стандартные отклонения:

$$\sigma_J = \sqrt{\sum_i \left( \frac{\partial J}{\partial x_i} \sigma_i \right)^2}, \quad (8.6)$$

где  $x_i$  – переменные, входящие в формулы для вычисления  $J$  и имеющие погрешности  $\sigma_i$  (в данном случае  $x_i$  – это переменные  $t, f, H, m, r$ ).

### Упражнение 2. Изучение прецессии гироскопа

Чтобы гироскоп начал прецессию, нужно разбалансировать его относительно точки опоры. Для этого наденьте на его ось дополнительный груз (8 на рис. 8.3), придвинув его вплотную к основному грузу 7.

1. Измерьте и запишите расстояние  $l$  от его центра до точки опоры гироскопа (плечо груза).

2. Подготовьте секундомер к измерениям, обнулив его показания.

3. Возьмите другую нить (без груза на конце) и накрутите ее на шкив. Рукой придерживайте ось гироскопа горизонтально так, чтобы флажок на маховике перекрывал фотодатчик.

4. Раскрутите маховик, с силой потянув нить горизонтально до ее полного схода со шкива, удерживая при этом рукой ось гироскопа на месте. Запомните частоту  $f_1$  вращения маховика, показываемую таймером, отпустите ось и одновременно включите секундомер. Ось гироскопа начнет поворачиваться вокруг вертикальной оси (прецессировать). Когда ось снова подойдет к фотодатчику, совершив *полный оборот*, остановите секундомер. Измеренная величина будет равна периоду прецессии  $T_{\text{эсп}}$ .

5. Ввиду торможения маховика частота его вращения уменьшится, и ее величину после полного оборота прецессии нужно измерить снова. Если за время оборота ось маховика наклонилась настолько, что флажок уже не перекрывает луча фотодатчика, то таймер ничего не измерит. В таком случае надо взяться рукой за свободный конец *оси гироскопа* 2, (рис. 8.3) и, не касаясь самого маховика, осторожно направить его ось на фотодатчик и установить горизонтально. Как только на таймере появится новое показание частоты  $f_2$ , сразу запишите его, пока оно не успело измениться.

6. Удерживайте ось гироскопа в горизонтальном положении до его остановки, не давая ему уйти на второй оборот прецессии. Если этого не сделать, то за время второго оборота ось может сильно наклониться, и опустившийся противоположный конец оси с противовесами столкнется с фотодатчиком.

**Будьте осторожны! Флажок раскрученного маховика может больно ударить по руке!**

7. Измерения следует провести 7-8 раз, раскручивая маховик до *разных* скоростей в пределах  $f = 3 \dots 10$  оборотов в секунду (Гц), стараясь равномерно распределить скорости в данном интервале, например  $f \approx 10, 9, 8, 7, 6, 5$  и 4 Гц.

*При ручной раскрутке маховика трудно прогнозировать получаемую скорость. Поэтому целесообразно каждый раз раскручивать маховик до максимальной скорости и, удерживая ось рукой, дожидаться, пока скорость вращения не уменьшится из-за трения до желаемой величины, и только затем начинать измерения. Отпускать ось гироскопа надо очень аккуратно, любой, даже слабый толчок приведет к тому, что помимо регулярной прецессии ось будет совершать дополнительные быстрые колебания в вертикальной плоскости – нутации, которые исказят результаты.*



Результаты измерений занесите в табл. 8.2.

Таблица 8.2.

**Период прецессии  $T$  в зависимости  
от средней частоты  $f$  вращения маховика**

$l$ , мм	$f$ , Гц	$T_{\text{эксп}}$ , с	$T_{\text{теор}}$ , с
	...	...	...
	...	...	...

Масса груза  $m = 45,8$  г.

8. Повторите весь цикл измерений для другого положения груза 8, отодвинув его до конца оси и измерив длину нового плеча  $l_2$ . Результаты занесите в табл. 8.2.

*Обработка результатов*

В соответствии с формулой (8.2), период прецессии гироскопа  $T_{\text{теор}}$  (его теоретическое значение) связан с частотой вращения его маховика  $f$  соотношением:

$$T_{\text{теор}} = \frac{4\pi^2 J}{mgl} f, \quad (8.7)$$

где  $m$  – масса разбалансирующего груза,  $l$  – плечо его центра масс относительно оси гироскопа.

1. Ввиду постепенного торможения собственного вращения гироскопа скорость его прецессии  $\Omega$  тоже будет меняться (возрастать) во время поворота. Приблизительно это можно учесть, введя в формулу (8.7) среднюю частоту вращения маховика за один прецессионный оборот:  $f = (f_1 + f_2)/2$ . Используя  $f$  и значение момента инерции  $J$ , полученное в упр. 1\*), для каждого измерения рассчитайте периоды прецессии по формуле (8.7) и их погрешности по формуле, аналогичной (8.6). Результат запишите в табл. 8.2.

2. Сравните полученные значения  $T_{\text{теор}}$  с экспериментальными.

3. Для дополнительной количественной оценки соответствия экспериментальных данных теоретическим, постройте график зависимости периода прецессии от средней частоты вращения маховика

\*) Для расчетов используйте тот из результатов измерения  $J$ , который получился с меньшей погрешностью.

$T(f)$  для положений груза на оси с плечом  $l_1$ . Убедитесь, что график соответствует линейной зависимости  $T = k_1 f$ .

4. Используя метод наименьших квадратов (МНК), найдите коэффициент  $k_1$  и стандартную погрешность  $\sigma_k$ .

5. Для положений грузов на оси с плечом  $l_1$  с учетом (8.7) рассчитайте момент инерции по формуле:

$$J_1 = \frac{mgl_1}{4\pi^2} k_1,$$

а также стандартное отклонение по формуле для косвенных измерений (8.6)

6. Сравните  $J_1$  с величиной, полученной в [упр. 1](#). Их совпадение в пределах погрешности измерения будет критерием адекватности рассмотренной выше теоретической модели гироскопа для нашего эксперимента.

7. Аналогичную обработку надо выполнить и для второго положения груза на оси с плечом  $l_2$ . Сравните отношение полученных экспериментально значений  $k_1$  и  $k_2$  с теоретической формулой:

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{l_2}{l_1}.$$

На основании полученных результатов сформулируйте выводы.

### Основные итоги работы

*В результате выполнения работы должны быть определены момент инерции маховика и зависимость периода прецессии гироскопа от частоты его вращения. Проведено сравнение экспериментальных и теоретических значений периодов прецессии, установлены возможные причины расхождения между экспериментом и теорией.*

### Контрольные вопросы

1. Что такое момент сил, момент импульса, момент инерции?
2. Что такое гироскоп? Основные особенности динамики уравновешенного гироскопа.
3. Как связаны вектор угловой скорости и момент импульса тела? В чём заключается основное приближение рассмотренной теории гироскопа?
4. Что такое регулярная прецессия?
5. Чем определяется скорость и направление вынужденной регулярной прецессии гироскопа?