

# 2

## ИЗУЧЕНИЕ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ ТЕЛ

### Цель работы

*Изучение закона свободного падения тел в поле тяжести и измерение ускорения свободного падения.*

### Идея эксперимента

Изучается наиболее простой случай свободного движения тел в поле тяжести – падение из состояния покоя, то есть с нулевой начальной скоростью. В этом случае тела движутся по прямой линии вертикально вниз. Измеряется полное время падения с разных высот.

### Теоретическое введение

В поле тяжести все тела движутся с одинаковым ускорением, если на них не действуют никакие другие силы. Это ускорение называется ускорением свободного падения и обычно обозначается вектором  $\mathbf{g}$ .

Согласно закону всемирного тяготения Ньютона все тела, находящиеся на поверхности Земли, притягиваются к ней с силой  $\mathbf{F}$ , которая направлена к центру Земли и по модулю равна

$$|\mathbf{F}| = F = G \frac{m_g M_g}{r^2}, \quad (2.1)$$

где  $m_g$  – гравитационная масса тела,  $M_g$  – гравитационная масса Земли,  $r$  – расстояние от центра Земли до центра тяжести тела.

Запишем 2-й закон Ньютона для тела в поле силы тяжести:

$$m_i a = G \frac{m_g M_g}{r^2}. \quad (2.2)$$

Здесь  $m_i$  – инертная масса тела,  $G$  – гравитационная постоянная. Если инертная и гравитационная массы равны, то величина ускорения будет одинакова для всех тел и равна  $a = GM_g/r^2$ . Таким образом, одинаковое ускорение всех тел в поле тяжести является проявлением эквивалентности инертной и гравитационной масс. Их равенство неоднократно проверялось экспериментально разными методами и в настоящее время установлено с точностью до  $10^{-13}$ .

На поверхности Земли ускорение

$$g = G \frac{M}{R_3^2} \quad (2.3)$$

приблизительно равно  $9,8 \text{ м/с}^2$  ( $R_3$  – радиус Земли). На высотах, которые много меньше радиуса Земли, изменение  $g$  достаточно мало. Так, на околоземной орбите на высоте около 300 км значение  $g$  лишь на 9 % меньше, чем на уровне моря.

Значение  $g$  на поверхности Земли зависит от географической широты  $\vartheta$ , поскольку из-за вращения Земли к силе тяготения добавляется сила инерции, пропорциональная радиусу вращения данной точки поверхности относительно земной оси:

$$F_{\text{ин}} = m\omega^2 R_3 \cos \vartheta, \quad (2.4)$$

Кроме того, полярный радиус Земли меньше экваториального. Поэтому  $g$  максимально на полюсе ( $\vartheta = 90^\circ$ ) и минимально на экваторе ( $\vartheta = 0^\circ$ ). Правда, это различие невелико (около 0,5%). Величина  $g$  зависит также от плотности пород под поверхностью Земли, что позволяет использовать результаты точных измерений  $g$  в геолого-разведке.

В настоящей работе исследуемое тело – стальной шарик, который свободно падает вертикально вниз. Как известно из кинематики, при движении точки вдоль прямой с нулевой начальной скоростью и с постоянным ускорением  $a$  закон движения (зависимость координаты  $x$  материальной точки от времени  $t$ ) имеет вид:

$$x = \frac{at^2}{2}. \quad (2.5)$$

Таким образом, экспериментальное подтверждение квадратичной зависимости  $x(t)$  при свободном падении можно рассматривать как доказательство равноускоренности движения, а измеренная константа  $a$  численно равна ускорению  $g$ .

Дополнительно в задаче предлагается на основании измеренной величины  $g$  рассчитать время прохождения падающим телом фиксированного отрезка пути и сравнить его с экспериментально измеренным. При равноускоренном движении без начальной скорости моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  прохождения телом начала и конца участка пути связаны с соответствующими координатами соотношениями:

$$x_1 = \frac{gt_1^2}{2}, \quad x_2 = \frac{gt_2^2}{2}. \quad (2.6)$$

Отсюда следует, что время прохождения телом участка  $x_1-x_2$  должно быть равно

$$\tau = t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{2}{g}}(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}). \quad (2.7)$$

Следует отметить, что рассмотренный способ абсолютного измерения  $g$  действительно нашел применение в прецизионной гравиметрии.

### Экспериментальная установка

Установка, общий вид которой представлен на рис. 2.1, обеспечивает измерение времени падения стального шарика с разных высот (от 50 до 96 см) с точностью до 0,1 мс.

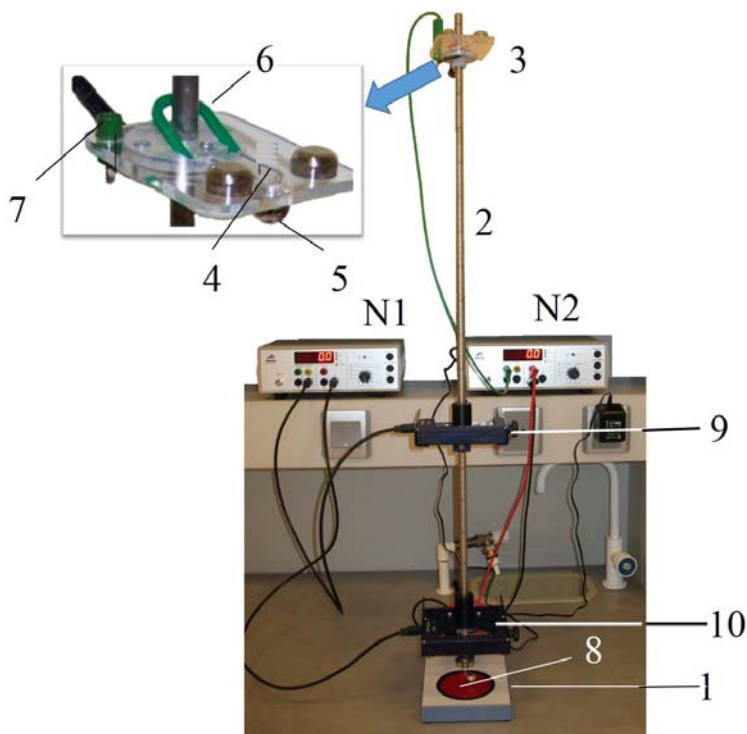


Рис. 2.1. Экспериментальная установка для исследования свободного падения тел.

Основным конструктивным элементом установки является штатив. Он состоит из плиты *основания* 1 и вертикального *опорного стержня* 2 с нанесенной на него сантиметровой шкалой. На стержне располагается устанавливаемая на разных высотах *пусковая площадка* 3 (на вставке показана в увеличенном виде), на которой постоянным *микромагнитом* 4 удерживается *стальной шарик* 5. При нажатии на *рычаг* 6 шарик отрывается от магнита и начинает падать. При отрыве он размыкает электрическую цепь, соединенную с *гнездом* 7, которая запускает счет времени на электронном таймере N2. При падении шарика на углубленную круглую *площадку* 8 на основании штатива, на гнезде, установленном на площадке, генерируется электрический импульс, останавливающий таймер. Используемый в задаче таймер описан в **Приложении 1** (с указанием органов управления).

Для реализации второй части задачи на стержне штатива (ниже пусковой площадки) установлены два фотоэлектрических датчика 9 и 10 на фиксированном расстоянии  $s = 30$  см друг от друга, к которым подключен другой таймер N1. При пролете через первый датчик шарик запускает счет времени этого таймера, а при пролете второго датчика таймер останавливается. Положения датчиков  $h_1$  и  $h_2$  относительно основания штатива заданы на установке.

Поскольку установка имеет два таймера, измерения по обеим частям задачи проходят одновременно.

### Проведение эксперимента

Все электрические соединения на установке заранее выполнены, и установка полностью готова к работе.

Перед началом измерений следует убедиться, что оба таймера включены в сеть и их индикаторы горят (см. **Приложение 1**). Для сброса начальных показаний индикаторов нажать кнопку 1 «Reset». Ручку 15 выбора режима работы таймера установить в то из трех имеющихся положений, отмеченных значком  $\Delta t_{AB}$ , при котором загорится индикаторный светодиод «ms» в группе светодиодов 5, и на индикаторе 6 появится знак десятичной запятой, соответствующий десятым долям миллисекунды (см. **Приложение 1**). Это обеспечит максимальную точность измерения интервалов времени.

Измерения начинают с минимальной высоты падения, постепенно увеличивая ее. Высота падения равна пути, проходимому цен-

тром масс шарика. Сантиметровая шкала на вертикальном стержне установлена так, что высота падения шарика точно равна показанию шкалы, считываемому по верхней кромке пусковой площадки (показана двойной стрелкой на рис. 2.2). При закреплении площадки в верхней части штатива ее верхняя кромка плохо видна. В этом случае удобно устанавливать высоту по нижней кромке втулки, связанной с площадкой, выставляя ее по шкале на 2,5 см ниже от требуемого значения высоты (одинарная стрелка на рис. 2.2).

### Измерения

1. Установить пусковую площадку на отметке шкалы, соответствующей высоте падения  $h_1 = 50$  см.

2. Закрепить шарик на пусковой площадке. Для этого подвести шарик одной рукой снизу к передней кромке площадки, прижать его между двумя контактами, а другой рукой нажать сверху на гибкую планку с постоянным микромагнитом до касания шарика. Убедиться, что шарик зафиксирован магнитом.

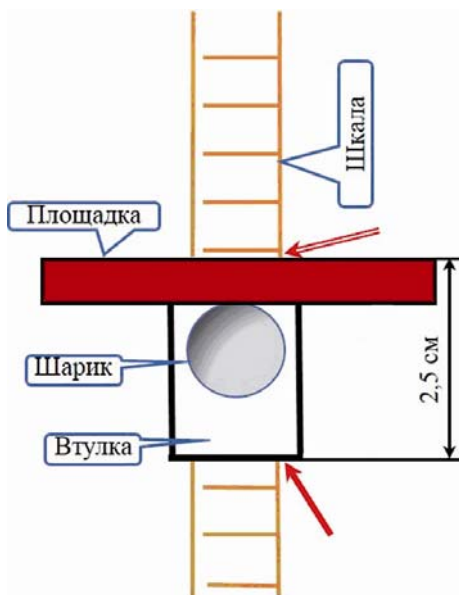


Рис. 2.2. Схема пусковой площадки и выставление начальной высоты шарика.

3. На обоих таймерах нажать кнопку 1 «Reset», при этом на индикаторах должны появиться нулевые показания. Нажать на спусковой рычаг 6 (рис. 2.1). После падения шарика записать показания обоих таймеров в табл. 2.1.

4. Для увеличения точности измерений повторить пп. 2 и 3 три раза. Результаты записать в табл. 2.1.

5. Аналогично выполнить измерения (пп. 3-4), увеличивая высоту установки площадки с шагом 5 см до максимально возможной. Результаты записать в табл. 2.1.

Таблица 2.1

## Результаты измерений

| $h$ | $k$ | Падение шарика |           |               |                          |                |                 | Пролет шарика |              |                  |                             | Расчет |       |                      |
|-----|-----|----------------|-----------|---------------|--------------------------|----------------|-----------------|---------------|--------------|------------------|-----------------------------|--------|-------|----------------------|
|     |     | $t_i$          | $\bar{t}$ | $S_{\bar{t}}$ | $\sigma_{\bar{t}\Sigma}$ | $\bar{t}^2$    | $S_{\bar{t}^2}$ | $\tau_i$      | $\bar{\tau}$ | $S_{\bar{\tau}}$ | $\sigma_{\bar{\tau}\Sigma}$ | $x_1$  | $x_2$ | $\tau_{\text{расч}}$ |
| см  |     | с              | с         | с             | с                        | с <sup>2</sup> | с <sup>2</sup>  | с             | с            | с                | с                           | см     | см    | с                    |
| 50  | 1   |                |           |               |                          |                |                 |               |              |                  |                             |        |       |                      |
|     | 2   |                |           |               |                          |                |                 |               |              |                  |                             |        |       |                      |
|     | 3   |                |           |               |                          |                |                 |               |              |                  |                             |        |       |                      |
| 55  | 1   |                |           |               |                          |                |                 |               |              |                  |                             |        |       |                      |
|     | 2   |                |           |               |                          |                |                 |               |              |                  |                             |        |       |                      |
|     | 3   |                |           |               |                          |                |                 |               |              |                  |                             |        |       |                      |
| ... |     |                |           |               |                          |                |                 | ...           |              |                  |                             |        |       |                      |

## Обработка результатов

1. Для каждой высоты  $h$  вычислить средние арифметические значения  $\bar{t}$  и  $\bar{\tau}$  по формулам:

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^k t_i}{k}, \quad \bar{\tau} = \frac{\sum_{i=1}^k \tau_i}{k},$$

где  $k = 3$ .

2. Для каждого значения  $h$  вычислить случайные погрешности  $S_{\bar{t}}$  и  $S_{\bar{\tau}}$  среднего арифметического по формулам:

$$S_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{\sum (t_i - \bar{t})^2}{k(k-1)}} \quad \text{и} \quad S_{\bar{\tau}} = \sqrt{\frac{\sum (\tau_i - \bar{\tau})^2}{k(k-1)}}.$$

3. Рассчитать суммарные погрешности по формулам:

$$\sigma_{\bar{t}\Sigma} = \sqrt{S_{\bar{t}}^2 + \sigma_m^2} \quad \text{и} \quad \sigma_{\bar{\tau}\Sigma} = \sqrt{S_{\bar{\tau}}^2 + \sigma_t^2},$$

где  $\sigma_t$  – приборная погрешность таймера. При отсутствии заводского описания погрешность цифровых приборов можно приближенно оценить в 2-3 единицы младшего разряда индикатора. В нашем случае это 0,2 мс.

Результаты пп. 1-3 записать в табл. 2.1.

4. Вычислить  $\bar{t}^2$  и соответствующую погрешность по формуле для косвенных измерений:

$$S_{\bar{t}^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial(\bar{t}^2)}{\partial \bar{t}}\right)^2} \cdot S_{\bar{t}}^2 = 2\bar{t} \cdot S_{\bar{t}}.$$

Результаты вычислений записать в табл. 2.1.

5. Поскольку согласно (2.5)  $h$  линейно зависит от  $\bar{t}^2$ , обработку провести в рамках линейной модели:

$$\bar{t}^2 = A \cdot h.$$

Переменная  $\bar{t}^2$  выбрана в качестве функции от аргумента  $h$ , потому что интервалы погрешностей заданы для времени, а значения  $h$  можно считать точными. Построить график зависимости  $\bar{t}^2(h)$  и методом наименьших квадратов определить коэффициент наклона  $A$  и его погрешность  $S_A$ . Результаты записать в табл. 2.2.

6. Согласно (2.5) ускорение  $g$  равно

$$g = \frac{2}{A}.$$

Подставляя значение  $A$ , получим значение  $g$ . Результат запишите в табл. 2.2.

7. Рассчитайте погрешность ускорения свободного падения по формуле:

$$S_g = g \frac{S_A}{A}.$$

Результат запишите в табл. 2.2.

Таблица 2.2

### Результаты расчета ускорения свободного падения

| $A$                   | $S_A$                 | $g$                   | $S_g$                 |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $\text{с}^2/\text{м}$ | $\text{с}^2/\text{м}$ | $\text{м}/\text{с}^2$ | $\text{м}/\text{с}^2$ |
|                       |                       |                       |                       |

8. Пользуясь найденным значением  $g$ , рассчитайте время  $\tau_{\text{расч}}$  прохождения шариком фиксированного участка пути для всех высот  $h$ . При расчете учесть, что координаты датчиков  $x_1$  и  $x_2$  в формулах (2.7) отсчитываются от точки начала падения шариков и составляют

$x_1 = h - h_1$ ,  $x_2 = h - h_2$ , где  $h_{1,2}$  – известные высоты установки датчиков.

9. Результаты п. 9 запишите в табл. 2.1. Сравните  $\tau_{\text{расч}}$  с измеренными значениями  $\tau$ .

### Основные итоги работы

*В процессе выполнения работы определяют значение ускорения свободного падения и сравнивают  $g$  с табличным значением для Баку.*

### Контрольные вопросы

1. Почему центры масс всех тел, находящихся в однородном гравитационном поле, движутся с одинаковым ускорением? Что мешает на практике обнаружить эту закономерность при падении тел на Земле?
2. Как зависит ускорение свободного падения от расстояния до центра Земли?
3. Почему ускорение свободного падения зависит от географической широты места на поверхности Земли?
4. Как направлен вектор  $g$  относительно направления к центру Земли (если считать ее шаром)? В каких точках поверхности Земли они совпадают по направлению?
5. Почему выгоднее всего запускать в космос ракеты с экватора (Гвиана – космодром Куру) и не выгодно на севере вблизи полярного круга (космодром Плесецк)?
6. При какой продолжительности суток на Земле  $g$  обратилось бы в нуль на экваторе? К чему бы это привело?
7. Получить формулы зависимости перемещения и скорости точки от времени при равноускоренном движении по прямой.