11 ИЗУЧЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ СВЯЗАННЫХ МАЯТНИКОВ

Цель работы

Изучение колебаний в системе из двух одинаковых связанных маятников, имеющей две степени свободы.

Идея эксперимента

В эксперименте регистрируются законы движения связанных маятников.

Теория

Два математических маятника, связанных между собой пружиной, являются простейшим примером связанной системы. Как известно свободный математический маятник обладает двумя степенями свободы, т.е. для описания его движения требуется два параметра, например - углы отклонения в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

Система из двух таких маятников описывается четырьмя параметрами, т. е. имеет четыре степени свободы. Если колебания, соответствующие каждой из степеней свободы, независимы, то задача описания движения системы является чисто кинематической, т. е. сводится к разложению сложного движения на сумму более простых. Если между движениями по различным степеням свободы имеется динамическая связь, вследствие которой движение по одной степени свободы вызывает динамические изменения во всех остальных степенях свободы, то это приводит к обмену механической энергией между степенями свободы.

Рассмотрим случай, когда каждый из двух маятников имеет одну степень свободы, а колебания происходят в одной плоскости. В этом случае система из двух одинаковых связанных маятников имеет две степени свободы (рис. 11.1).

Для свободного математического маятника уравнение моментов имеет вид:

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -mgl\sin\alpha\,, \tag{11.1}$$

где J – момент инерции, m – масса маятника, l – длина подвеса, α– угол отклонения от положения равновесия. С учетом $J = ml^2$, при малых углах $\sin\alpha \approx \alpha$ получаем уравнение гармонического осциллятора

$$ml^2\ddot{\alpha} + mgl\alpha = 0, \qquad (11.2)$$

или

$$\ddot{\alpha} + \omega^2\alpha = 0, \qquad (11.3)$$

где $\omega = \sqrt{g/l}$.

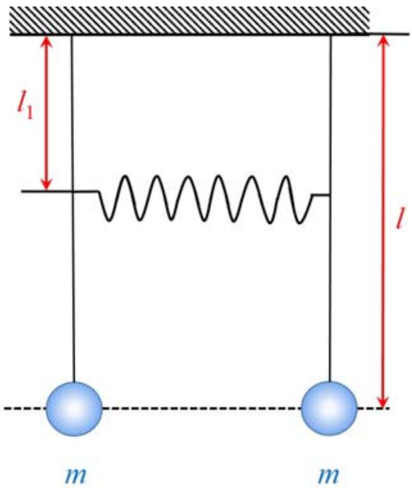

Рис. 11.1. Система из двух маятников, связанных между собой пружиной.

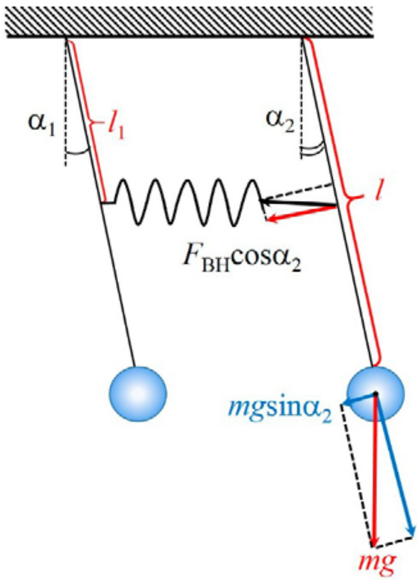

Рис. 11.2. Силы, действующие на один из маятников.

В случае связанных маятников на каждый маятник будет дополнительно действовать сила со стороны пружины $F_{вн}$, которая при небольших отклонениях маятников может быть рассчитана с помощью закона Гука:

$$F_{ВН} = k\Delta x = kl_1(\alpha_2 - \alpha_1). \qquad (11.4)$$

С учетом момента этой силы, вместо (11.2) для первого и второго маятников соответственно получаем (см. рис. 11.2):

$$ml^2\ddot{\alpha}_1 = -mgl\sin\alpha_1 + F_{ВН}l_1\cos\alpha_1 \cong -mgl\alpha_1 + kl_1^2(\alpha_2 - \alpha_1), \qquad (11.5)$$

$$ml^2\ddot{\alpha}_2 = -mgl\sin\alpha_2 - F_{ВН}l_1\cos\alpha_2 \cong -mgl\alpha_2 - kl_1^2(\alpha_2 - \alpha_1), \qquad (11.6)$$

где учтено, что при малых углах $\cos\alpha \approx 1$ и $\sin\alpha \approx \alpha$.

Преобразуем (11.5) и (11.6) к виду:

$$\ddot{\alpha}_1 + \frac{g}{l}\alpha_1 - \frac{kl_1^2}{ml^2}\left(\alpha_2 - \alpha_1\right) = 0\,, \tag{11.7}$$

$$\ddot{\alpha}_2 + \frac{g}{l}\alpha_2 + \frac{kl_1^2}{ml^2}\left(\alpha_2 - \alpha_1\right) = 0\,. \tag{11.8}$$

Складывая и вычитая (11.7) и (11.8), для новых переменных $\Psi_1 = \alpha_1 + \alpha_2$ и $\Psi_2 = \alpha_1 - \alpha_2$ получаем:

$$\ddot{\psi}_1 + \omega_1^2\psi_1 = 0\,, \tag{11.9}$$

$$\ddot{\psi}_2 + \omega_2^2\psi_2 = 0\,, \tag{11.10}$$

где $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ и $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{g}{l} + \dfrac{2kl_1^2}{ml^2}}$.

Уравнения (11.9) и (11.10) описывают гармонические колебания:

$$\psi_1(t) = A_0 \sin\left(\omega_1 t + \varphi_1\right) \tag{11.11}$$

и

$$\psi_2(t) = B_0 \sin\left(\omega_2 t + \varphi_2\right), \tag{11.12}$$

где A_0, B_0, φ_1, и φ_2 определяются начальными условиями, т.е. значениями ψ_1, ψ_2, $\dot{\psi}_1$, $\dot{\psi}_2$ при $t = 0$:

$$A_0 = \sqrt{\psi_1^2(0) + \frac{\dot{\psi}_1^2(0)}{\omega_1^2}}; \qquad B_0 = \sqrt{\psi_2^2(0) + \frac{\dot{\psi}_2^2(0)}{\omega_2^2}}; \tag{11.13}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\psi_1(0)\omega_1}{\dot{\psi}_1(0)}; \qquad \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\psi_2(0)\omega_2}{\dot{\psi}_2(0)}. \tag{11.14}$$

Возвращаясь к координатам α_1 и α_2, т.е. проделав преобразования, обратные тем, при которых были получены (11.9) и (11.10), имеем:

$$\alpha_1(t) = A\sin(\omega_1 t + \varphi_1) + B\sin(\omega_2 t + \varphi_2)\,, \tag{11.15}$$

$$\alpha_2(t) = A\sin(\omega_1 t + \varphi_1) - B\sin(\omega_2 t + \varphi_2)\,. \tag{11.16}$$

Таким образом, колебания каждого маятника описываются суперпозицией двух гармонических колебаний Ψ_1 и Ψ_2, которые получили название нормальных колебаний.

Амплитуды (A и B) и фазы (φ_1 и φ_2) определяются начальными условиями, т.е. значениями α_1, α_2, $\dot{\alpha}_1$, $\dot{\alpha}_2$ при $t = 0$:

$$A = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\alpha_1(0) + \alpha_2(0)\right)^2 + \frac{\left(\dot{\alpha}_1(0) + \dot{\alpha}_2(0)\right)^2}{\omega_1^2}}, \qquad (11.17)$$

$$B = \frac{B_0}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\alpha_1(0) - \alpha_2(0)\right)^2 + \frac{\left(\dot{\alpha}_1(0) - \dot{\alpha}_2(0)\right)^2}{\omega_2^2}}, \qquad (11.18)$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\left(\alpha_1(0) + \alpha_2(0)\right)\omega_1}{\dot{\alpha}_1(0) + \dot{\alpha}_2(0)}; \qquad \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\left(\alpha_1(0) - \alpha_2(0)\right)\omega_2}{\dot{\alpha}_1(0) - \dot{\alpha}_2(0)}. \qquad (11.19)$$

Рассмотрим конкретные примеры.

А. Пусть в начальный момент времени второй маятник находится в состоянии покоя, а первый маятник отклонен на некоторый угол $\alpha_1(0)$. Тогда $\alpha_2(0) = \dot{\alpha}_2(0) = 0$, $\alpha_1(0) \neq 0$, $\dot{\alpha}_1(0) = 0$, поэтому $A = \alpha_1(0)/2$; $B = \alpha_1(0)/2$; $\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\varphi_2 = \infty$; $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$. Соответственно закон движения для первого маятника:

$$\alpha_1(t) = \frac{\alpha_1(0)}{2}\left(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t\right) =$$

$$= \alpha_1(0)\left(\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t\right)\right). \qquad (11.20)$$

Считая связь достаточно слабой (т. е. $mgl >> kl_1^2$), получаем, что $\omega_1 \approx \omega_2$ и $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 << \omega' = (\omega_1 + \omega_2)/2$. В этом случае формула (11.20) описывает так называемые биения (см. рис. 11.3), т.е. колебания с периодом $T_1 = 2\pi/\omega' = 4\pi/(\omega_1 + \omega_2)$, амплитуда которых медленно (по сравнению с T_1) меняется со временем от максимального значения до нуля по закону $|\alpha_0 \cos\Delta\omega t/2|$ с периодом $T_Б = 2\pi/(\omega_2 - \omega_1)$ (т. е. $T_Б >> T_1$).

Для второго маятника, находившегося в начальный момент $t = 0$ в покое, закон движения имеет вид:

$$\alpha_2(t) = \frac{\alpha_1(0)}{2}\left(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t\right) = -\alpha_1(0)\sin\frac{\Delta\omega t}{2}\sin\omega' t. \qquad (11.21)$$

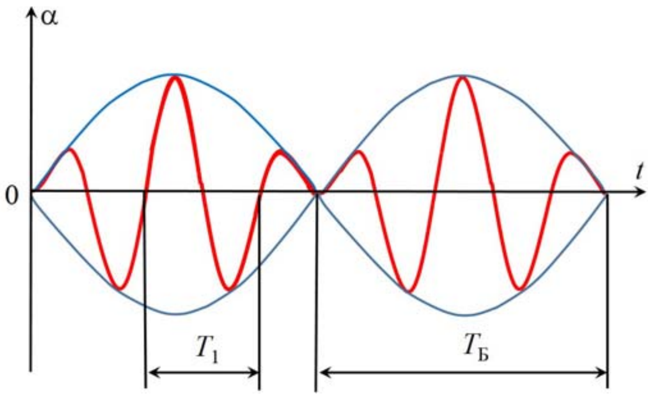

Рис. 11.3. Колебание одного из маятников при биениях.

Б. Пусть в начальный момент времени t = 0 оба маятника отклонены от положения равновесия в одну сторону на одинаковый угол. Тогда $\alpha_1(0) = \alpha_2(0)$, $\dot{\alpha}_1(0) = \dot{\alpha}_2(0) = 0$, $A = \alpha_1(0)$, $B = 0$; $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$. В этом случае

$$\alpha_{1,2}(t) = \alpha_1(0)\cos\omega_1 t\,, \tag{11.22}$$

т.е. оба маятника синхронно колеблются с первой нормальной частотой

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}\,, \tag{11.23}$$

поскольку пружина связи не деформируется и не влияет на движение каждого из маятников.

В. Оба маятника отклонены на одинаковый угол, но в противоположных направлениях от положения равновесия, т. е. $\alpha_1(0) = -\alpha_2(0)$; $\dot{\alpha}_1(0) = \dot{\alpha}_2(0) = 0$ и $A = 0$; $B = \alpha_l(0)$; $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$.

В этом случае

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= \alpha_1(0)\cos\omega_2 t, \\ \alpha_2(t) &= -\alpha_1(0)\cos\omega_2 t, \end{aligned} \tag{11.24}$$

т.е. оба маятника колеблются со второй нормальной частотой

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2kl_1^2}{ml^2}}\,, \tag{11.25}$$

но в противофазе.

Экспериментальная установка

Установка состоит из металлической *рамы* 1 (см. рис. 11.4), на которую подвешены два одинаковых *маятника* 2. В качестве маятников использованы длинные легкие стержни, на нижних концах которых укреплены чечевицы массой m. Верхние концы стержней маятников закреплены на *раме* 1 с помощью подшипников так, что плоскость движения маятников совпадает с плоскостью рамы. На расстоянии l_1 от точки подвеса (центра подшипника) в стержнях маятника просверлены маленькие отверстия для крепления легкой *пружины связи* 3. К верхней части рамы прикреплены *датчики 4*, регистрирующие отклонения маятников. *Датчики* 4 соединены последовательно с *усилителем сигналов* 5, *приставкой электронного осциллографа* 6 и *компьютером* 7. На мониторе *компьютера* 7 в реальном времени отображаются колебания *маятников* 2.

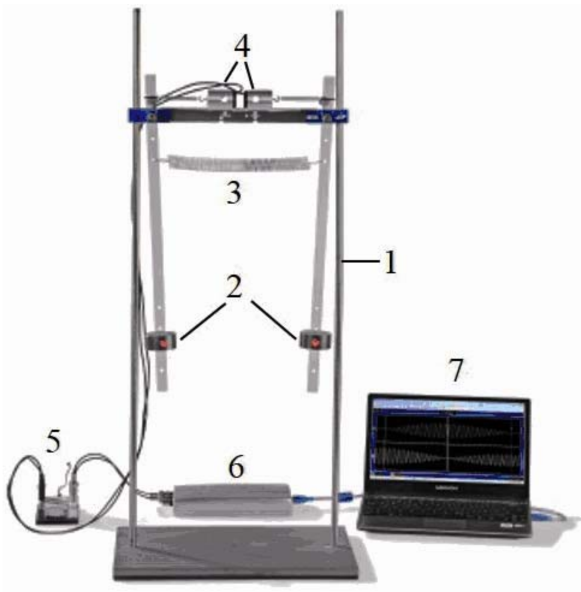

Рис. 11.4. Экспериментальная установка.

Проведение эксперимента

Перед началом работы нужно включить компьютер и на рабочем столе запустить программу «Связанные колебания».

Упражнение 1. **Определение первой нормальной частоты колебаний системы связанных маятников**

Измерения

1. Аккуратно руками отклоните оба маятника на одинаковый угол в одном направлении от положения равновесия и отпустите.

2. Дождитесь нужного количества (10-15) колебаний (см. рис. 11.5).

3. Нажмите красную кнопку СТОП на верхней панели (см. рис. 11.5).

4. Далее, нажав в меню кнопку «Cross Cursor», с помощью компьютерной мыши выбираете временной интервал, который вас интересует. Значение временного интервала отображается внизу окна (см. рис.11.5).

5. Запишите полученные значения временного интервала Δt и количество колебаний n в таблицу 11.1.

6. Повторите пп. 1–5 3-4 раза.

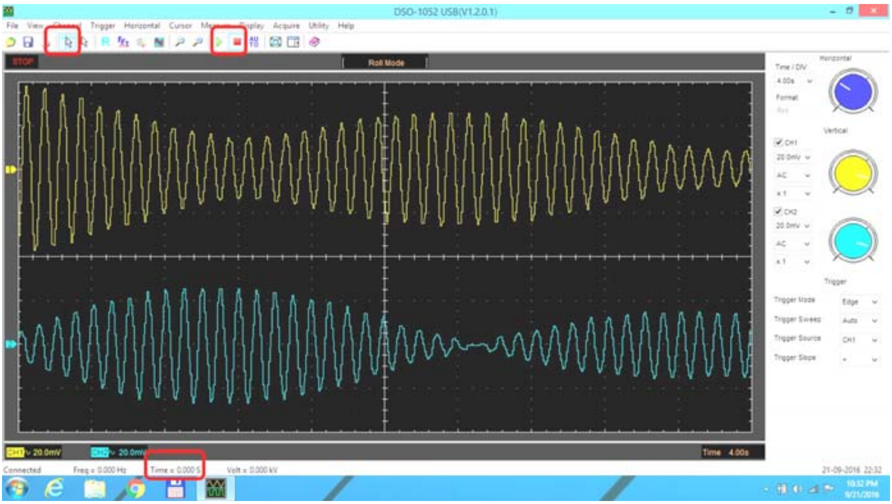

Рис. 11.5. Рабочая область экрана.

Обработка результатов

1. Для каждого измерения вычислить период колебаний $T_i = \Delta t_i / n$ и полученные значения запишите в табл. 11.1.

2. Вычислите и запишите в табл. 11.1 среднее значение периода T. Убедитесь, что периоды обоих маятников совпадают.

3. По среднему значению периода T_1 определите первую нормальную частоту: $\omega_1 = 2\pi/T_1$. Результат запишите в табл. 11.1.

4. Оцените погрешности измерения периодов и частот.

Таблица 11.1

Значения периодов и частот двух связанных маятников с одним направлением колебаний

	N	n	Δt_i	T_i	$\langle T_1 \rangle$	$\sigma_{\langle T \rangle_1}$	ω_1	$\sigma_{\langle \omega_1 \rangle}$
			с	с	с	с	$с^{-1}$	$с^{-1}$
Первый маятник	1							
	2							
	3							
Второй маятник	1							
	2							
	3							

Упражнение 2. **Определение второй нормальной частоты колебаний системы связанных маятников**

Измерения

1. Аккуратно руками отклоните оба маятника на одинаковый угол, но в противоположных направлениях от положения равновесия, и отпустите.

2. Дождитесь нужного количества (10 - 15) колебаний (см. рис. 11.5).

3. Нажмите красную кнопку СТОП на верхней панели (см. рис. 11.5).

4. Далее, нажав в меню кнопку «Cross Cursor», с помощью компьютерной мыши выберите временной интервал, который вас интересует. Значение временного интервала отображается внизу окна (см. рис. 11.5).

5. Запишите полученные значения временного интервала Δt и количество колебаний n в табл. 11.2.

6. Повторите п.п. 1 – 5 3–4 раза.

Обработка результатов

1. Для каждого измерения вычислите период колебаний $T_i = \Delta t_i / n$ и запишите в табл. 11.2.

2. Вычислите и запишите в табл. 11.2 среднее значение периода $\langle T \rangle$. Убедитесь, что периоды обоих маятников совпадают.

3. По среднему значению периода T_2 определить вторую нормальную частоту: $\omega_2 = 2\pi/T_2$.

4. Оцените погрешности измерения периодов и частот.

5. Вычислите значение частоты биений $\omega_Б = \omega_2 - \omega_1$ и оцените ее погрешность.

Таблица 11.2

Значения периодов и частот двух связанных маятников, с противоположным направлением колебаний

	N	n	Δt_i	T_i	$\langle T_2 \rangle$	$\sigma_{\langle T_2 \rangle}$	ω_2	$\sigma_{\langle \omega_2 \rangle}$
			с	с	с	с	$с^{-1}$	$с^{-1}$
Первый маятник	1							
	2							
	3							
Второй маятник	1							
	2							
	3							

Упражнение 3. **Определение частоты биений системы связанных маятников**

Измерение

1. Один маятник аккуратно рукой отклоняют на начальный угол и отпускают, второй маятник находится в состоянии покоя.

2. Дождитесь нужного количества колебаний, чтобы определить $T_Б$ (см. рис.11.5).

3. Нажмите красную кнопку СТОП на верхней панели (см. рис.11.5).

4. Далее нажимаете в меню кнопку «Cross Cursor» и с помощью компьютерной мыши выбираете временной интервал, который вас интересует. Значение временного интервала отображается внизу окна (см. рис.11.5).

5. Запишите полученные значения периода биений $T_Б$ (см. рис.11.3) в табл. 11.3.

6. Повторите пп. 1–5 3-4 раза.

Обработка результатов

1. Вычислите и занесите в табл. 11.3 среднее значение периода биений $T_Б$.

2. По среднему значению периода $T_б$ определить частоту биений $\omega_Б = 2\pi/T_Б$.

3. Оцените погрешности измерения периода и частоты биений.

4. Сравните полученное значение частоты биений со значением, полученным во втором упражнении.

Таблица 11.3

Значения периодов и частот биений связанных маятников

	N	$T_Б$	$\langle T_Б \rangle$	$\sigma_{\langle T_Б \rangle}$	$\omega_Б$	$\sigma_{\langle \omega_Б \rangle}$
		с	с	с	$с^{-1}$	$с^{-1}$
Первый маятник	1					
	2					
	3					
Второй маятник	1					
	2					
	3					

Основные итоги работы

В результате выполнения работы должны быть представлены значения ω_1 , ω_2 , $\omega_{Б.}$; проводится сравнение значений периода биений $T_Б$, полученных экспериментально в упр. 3 и вычисленного по формуле $T_Б = 2\pi/(\omega_2-\omega_1)$.

Контрольные вопросы

1. Что такое классический гармонический осциллятор?
2. Сколько степеней свободы имеет каждый из маятников?
3. Получить выражения для нормальных частот.
4. При каких условиях в системе из двух связанных одинаковых маятников, имеющих только две степени свободы, возникают биения?