

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ И ФИЗИКИ КОНДЕНСИРОВАННОГО
СОСТОЯНИЯ

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА
«ЭФФЕКТИВНЫЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ ОТКЛИК
АНИЗОТРОПНЫХ МЕТАМАТЕРИАЛОВ»

Выполнил студент
421 группы
Громько Дмитрий Алексеевич

подпись студента

Научный руководитель:
доктор ф.-м. наук, профессор
Тиходеев Сергей Григорьевич

подпись научного руководителя

Допущена к защите

Зав.кафедрой _____
подпись зав.кафедрой

Москва

2019

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1 ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ	8
1.1 Нелокальный подход к описанию метаматериалов	8
1.2 Плазмоны	14
1.3 Использование наночастиц в создании функциональных матери- алов	22
2 ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ	27
3 ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ОТКЛИКА ПО ОП- ТИЧЕСКИМ СПЕКТРАМ	36
ВЫВОДЫ	49
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	50
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	52

ВВЕДЕНИЕ

Фотонные кристаллы — искусственные пространственно-модулированные структуры, например, металл/диэлектрик, которые обладают пространственной периодичностью — в диапазоне длин волн λ , превышающих период фотонного кристалла p , называются метаматериалами. Благодаря условию $p < \lambda$, при облучении плоско-параллельного слоя метаматериала плоскими электромагнитными волнами не возникает дифракции, и структуру можно охарактеризовать параметрами однородного вещества. Такое описание позволяет обращаться со сложной составной структурой как с природными материалами привычным для электродинамики способом, не исследуя задачи взаимодействия электромагнитных полей с частями структуры каждый раз заново при создании образца новой формы и размера. Поскольку сейчас на метаматериалы возлагаются большие надежды в самых разных областях физики: нанооптике, прикладной фотонике, сенсорике, для полноценного изучения возможностей создания новых устройств на их основе необходима стандартизация и эффективное описание уже известных метаматериалов.

Особая привлекательность метаматериалов заключается в возможности получения контролируемого электромагнитного отклика, в том числе получения отрицательных значений диэлектрической ϵ и магнитной μ проницаемостей в определенных диапазонах частот падающего излучения, что ведет к появлению отрицательного показателя преломления. Проблема корректного описания эффективного электромагнитного отклика в длинноволновом пределе [1, 2] до сих пор является актуальной из-за сложности учета влияния анизотропии метаматериала при низкой симметрии трансляционной ячейки. Существуют различные техники решения этой проблемы, например, описание с помощью усреднения микроскопических полей, но его затруднительно использовать при экспериментальном изучении метаматериала. Кроме того, известны способы вычисления эффективного отклика по известным спектрам отражения и пропускания электромагнитной волны, которые были ранее описаны в

работах [2, 3]. Поскольку и теоретические, и экспериментальные методы определения параметров рассеяния широко распространены, эта техника вызывает наибольший интерес. В работе [3] было показано, что описание отклика только через диэлектрическую проницаемость ε и магнитную проницаемость μ в ряде случаев является недостаточным, и нужно использовать в материальных уравнениях среды дополнительные восприимчивости, называемые киральностью χ и бианизотропией β . Разработка метода их вычисления стала основной целью представленной выпускной квалификационной работы.

В данной работе предложен способ восстановления локальных восприимчивостей ε , μ , χ и β по известным элементам оптической матрицы рассеяния [4] и приведен анализ результатов численного моделирования для конкретных метаматериалов. Первым объектом исследования является метаматериал типа

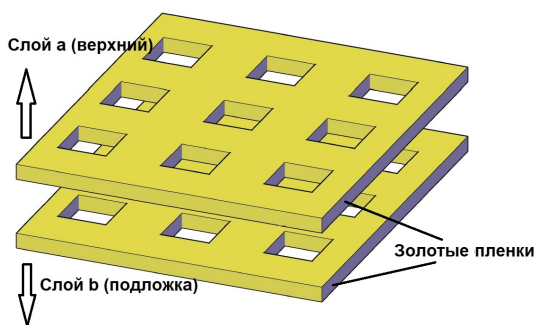


Рисунок 1 – Метаматериал «двойная рыболовная сеть». Обкладки - полубесконечные слои изотропного немагнитного диэлектрика.

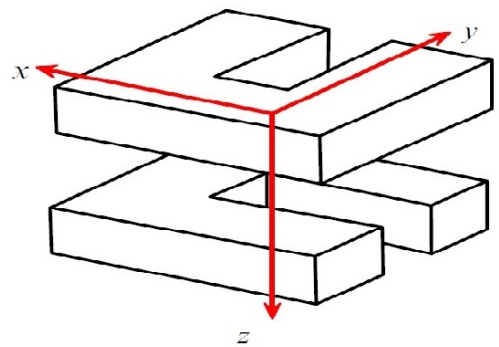


Рисунок 2 – Элементарная ячейка метаматериала, состоящая из двух повернутых на 90 градусов щелевых резонаторов. Обкладки - полубесконечные слои изотропного немагнитного диэлектрика.

«двойная рыболовная сеть» (Рис. 1), состоящий из двух золотых пленок толщины 30 нм, перфорированных квадратными отверстиями с длиной стороны 360 нм и периодом решетки 823 нм, а также диэлектрического слоя $\varepsilon = 2,73$ между ними (ширина слоя равна 60 нм).

Также был исследован метаматериал, элементарная ячейка которого состоит из двух щелевых резонаторов (Рис. 2). Квадратная решетка $700 \times 700 \text{ нм}^2$ содержит внутри себя конструкцию из золотых резонаторов $230 \times 230 \text{ нм}^2$ в слое диэлектрика $\varepsilon = 2,4$. Толщина линии резонатора по горизонтали 90 нм, толщина по вертикали 50 нм, расстояние по вертикали 70 нм. В стеклянной подложке $\varepsilon = 2,25$.

В пространственно-локальном приближении тензор диэлектрической проницаемости имеет вид $\hat{\varepsilon} \propto \varepsilon(\vec{r}, t - t')\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ (см. более детальное обсуждение в разделе 1.1 Обзора литературы). После перехода к частотному приближению все восприимчивости становятся локальными функциями частоты. Для полного описания локального отклика необходимо ввести дополнительные восприимчивости [5]:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon\vec{E}(\vec{r}) + \xi\vec{H}(\vec{r}); \quad \vec{B}(\vec{r}) = \zeta\vec{E}(\vec{r}) + \mu\vec{H}(\vec{r}). \quad (1)$$

В выражении 1 комплексные тензорные величины ε, μ есть соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости, а ξ и μ - перекрестные члены в разложении индукций электромагнитного поля (D, B) по напряженностям (E, H). Существуют также модели нелокального отклика, некоторые из них далее будут отдельно обсуждены в контексте полученных результатов. Для определения локальных восприимчивостей из уравнения (1) были поставлены следующие задачи:

1. В рамках заявленной модели рассмотреть случаи нормального падения электромагнитной волны из верхнего слоя «а» и дальнейшего прохождения через плоско-параллельный слой метаматериалов в нижний слой «b» (Рис. 1, 2). Слои а и b считать изотропными немагнитными диэлектриками. При этом рассмотреть случаи симметричных и несимметричных обкладок, т.е. для слоев а и b воздух-воздух и воздух-диэлектрик соответственно.

2. Показать, что уравнения (1) для нормального падения электромагнитной волны на плоский слой метаматериала можно привести к виду [3]

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ B_x \\ B_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & i\chi_x & i\beta_x \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & -i\beta_y & -i\chi_y \\ -i\chi_x & i\beta_y & \mu_{xx} & \mu_{xy} \\ -i\beta_x & i\chi_y & \mu_{xy} & \mu_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ H_x \\ H_y \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь и далее β и χ называются бианизотропией и киральностью соответственно. Это восприимчивости, связывающие электрическую индукцию с магнитным полем и магнитную индукцию – с электрическим.

3. Вывести уравнения, связывающие коэффициенты материальной матрицы из уравнения (2) и матрицы рассеяния, а именно: по полученным с помощью метода гармоник Фурье матрицам рассеяния численно восстановить неизвестные параметры эффективного отклика метаматериалов, построить графики зависимостей мнимой и действительной частей этих параметров от энергии волны. Моделирование рассеяния электромагнитного излучения на метаматериалах провести в программном пакете MATLAB.

Работа состоит из настоящего Введения, Обзора литературы (первой Главы с тремя разделами), второй и третьей Глав, Выводов, Заключение и Списка использованных источников.

В первом разделе Обзора рассмотрены альтернативные подходы к описанию метаматериалов, обсуждены их достоинства и недостатки.

Во втором разделе Обзора приведено описание эффекта образования плазмонных волн, важного для понимания микроскопических процессов в метаматериалах. Показана связь этого эффекта с достижением отрицательного показателя преломления.

Третий раздел Обзора посвящен теме использования наночастиц и включений наномасштабов при создании метаматериалов, дан обзор наиболее популярных и известных типов наночастиц.

Во второй Главе описан подход к вычислению матрицы рассеяния с помощью метода гармоник Фурье, приводятся основные принципы техники компьютерного моделирования уравнений Максвелла в периодических средах.

Третья Глава посвящена теоретическому решению поставленных в выпускной квалификационной работе задач. Приведены и проанализированы полученные результаты.

Заключение и Выводы содержат обобщение проведенного теоретического исследования, в этих главах обсуждены критерии применимости локального и нелокального подходов к описанию оптического отклика слоев метаматериалов.

Результаты данной работы были представлены в виде устного доклада на универсиаде «Ломоносов — 2019» по теоретической и прикладной физике, а также на международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов — 2019».

1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

1.1 Нелокальный подход к описанию метаматериалов

Теории эффективной среды являются очень привлекательным и удобным подходом к описанию процессов в средах, так как они позволяют свести сложные задачи распространения электромагнитных волн в неоднородных средах к достаточно простым задачам распространения в непрерывных средах, которые описывают исходную задачу с помощью малого набора эффективных параметров. Такой подход широко распространен для описания обычных материалов, так как в них электромагнитный отклик отдельных атомов просуммирован и усреднен в объеме в виде диэлектрической и магнитной проницаемостей [6]. Несмотря на свою распространенность, метод до сих пор имеет ряд нерешенных вопросов и актуальных проблем. Первая проблема заключается в необходимости корректной постановки физической модели. Поскольку основная цель - возможность воспроизведения точных решений задачи о распространении волн, описание получается различным в зависимости от того, какие допущения были сделаны в модели. К сожалению, известные в литературе примеры описания редко сходятся в результатах даже в длинноволновом пределе [1],[7]-[11]. Вторая проблема заключается в необходимости корректного описания полей на границах раздела материалов. Вопрос осложнен тем, что зачастую микроскопические поля на границе являются сильно неоднородными.

В самом общем виде, исходя из линейности задачи, электромагнитный отклик описывается соотношением вида [12]

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \int d\vec{r}' dt' \hat{\epsilon}(\vec{r}, \vec{r}'; t, t') \vec{E}(\vec{r}', t'), \quad (3)$$

где $\hat{\epsilon}(\vec{r}, \vec{r}'; t, t')$ – тензор нелокальной (в пространстве и времени) диэлектрической проницаемости.

В приближении однородной (в пространстве и времени) эффективной среды

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}(\vec{r} - \vec{r}'; t - t'). \quad (4)$$

Это позволяет перейти от нелокального отклика в пространственно-временном представлении к локальному в пространстве ”импульс – энергия” (или ”волновой вектор – частота”) . В частности, в работе [13] утверждается, что в ряде случаев восстановление локальных восприимчивостей не является эффективным описанием. Вместо этого авторы работы предлагают использовать модель эффективной однородной среды с нелокальностью в виде:

$$D = \varepsilon \vec{E} + \nabla \times \alpha (\nabla \times \vec{E}) + \nabla \times \nabla \times \gamma (\nabla \times \nabla \times \vec{E}). \quad (5)$$

В таком подходе при описании слоев метаматериалов конечной ширины возникает проблема дополнительных граничных условий. Основная причина этого состоит в том, что электромагнитный отклик слоев метаматериалов конечной толщины существенным образом зависит от обеих координат в тензоре обобщенной восприимчивости. Задача была решена [14] для композитного материала, мета-атомы которого состоят из материалов со слабой пространственной дисперсией, но тем не менее обладают квадрупольным откликом. С учетом дополнительных требований можно составить матричные уравнения Френеля, по которым восстанавливаются параметры из (5). Далее восстановленные параметры подставляются обратно в модифицированные уравнения Френеля, таким образом проверяется воспроизводимость спектров прохождения, полученных с помощью метода гармоник Фурье. Кроме того, авторы работы [13] восстанавливают локальные восприимчивости материала, т.е. только ε и μ (однозначно связан с α из уравнения (5)), чтобы аналогичной процедурой проверить насколько точно восстановленные параметры среды пригодны для описания исходных оптических спектров. Также отмечается отрицательная часть диэлектрической проницаемости анти-Лоренцевского вида в случае описания локальными параметрами - эффект, который исчезает при использовании нелокальности.

Стоит отметить, что подход авторов работы [13] применим исключительно для centrosymmetric материалов, в которых возможно разделение поляризаций. В статье выведены дисперсионные соотношения для двух поляризаций волн, и приведена полная матрица Френеля для проходящего электромагнитного излучения с учетом дополнительного граничного условия. Поскольку полученные формулы оказываются слишком сложны и имеют нелинейный характер, восстановление параметров происходит без непосредственного обращения формул. Значения подбираются так, чтобы спектры прохождения, вычисленные по формулам с восстановленными восприимчивостями, наилучшим образом повторяли расчеты методом мод Фурье.

Авторами были восстановлены материальные параметры двух метаматериалов: структуры, состоящей из диэлектрических немагнитных шаров и материала «двойная рыболовная сеть». Для первого из них было показано более успешное использование нелокального описания при больших углах падения излучения. На низких частотах восстановленные параметры совпадали с ожидаемыми в соответствии с теорией Максвелла-Гарнета. Интересно, что нелокальность была существенна при малых частотах и затухала пропорционально ω^{-4} , а магнитная восприимчивость, наоборот, сильно отклонялась от единицы с увеличением частоты. Для «двойной рыболовной сети» авторами было показано, что нелокальный отклик гораздо полнее реализовывает сходимость с результатами численного моделирования, точнее повторяет функциональные особенности (Рис. 3).

Приведенный авторами в дальнейшем анализ формул для получения оптических спектров показывает, что среди параметров уравнения (5) наиболее важными являются ε_x , μ_y и γ_z , в то время как существенные изменения других параметров не приводят к качественному изменению прохождения и отражения. Наибольшее внимания, по мнению авторов, заслуживает параметр нелокальности (поляризация выбрана таким образом, что при нормальном угле падения электрическое и магнитное поля направлены вдоль осей x и y соответственно). Особенно стоит отметить, что восстановление нелокальных материальных параметров для двойного слоя метаматериала показало

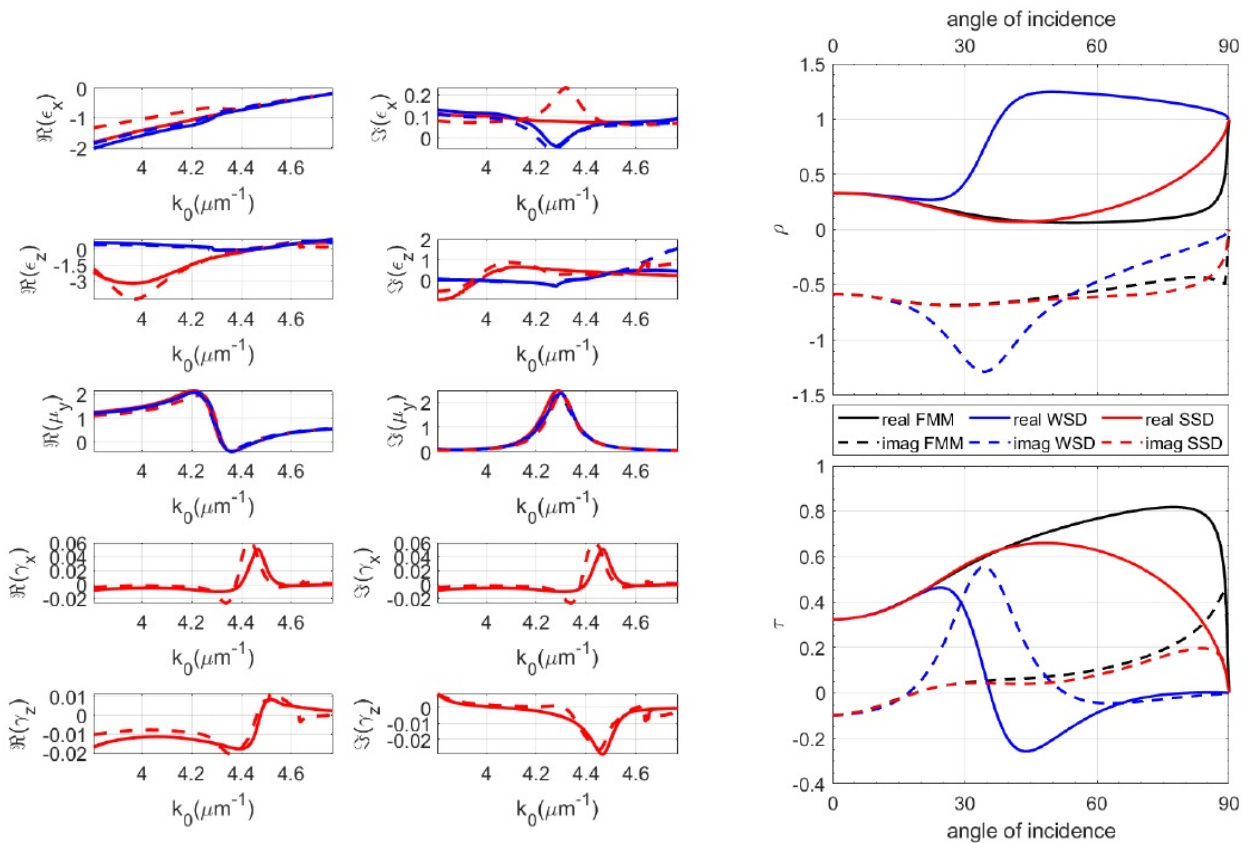


Рисунок 3 – Восстановленные локальные и нелокальные восприимчивости(слева) и проверка точности аппроксимации коэффициентов прохождения и отражения с помощью описания восстановленными компонентами оптического отклика [13]. Материалом моделирования является ”двойная рыболовная сеть” с квадратной решеткой вытянутых прямоугольных дырок в слое металл-диэлектрик-металл. Диэлектрическое окружение предполагается симметричным. Красным на графике обозначены зависимости, соответствующие восстановлению по формуле (5), синим - восстановление по той же формуле, но в предположении, что $\gamma = 0$, т.е. в локальном случае. На левом графике также присутствуют данные, соответствующие восстановлению компонент отклика для двойного слоя материала, они отображены пунктиром. На правом графике сплошными линиями отображены действительные части коэффициентов прохождения τ и отражения ρ (пунктиром - соответствующие мнимые части) в зависимости от угла падения излучения. Особое внимание стоит обратить на две особенности - на сходимость локального и нелокального описания при малых углах и на наличие отрицательной мнимой части в диэлектрической проницаемости ϵ_x при локальном описании.

результаты схожие с результатами для единичного слоя, что говорит о высокой эффективности описания. Диэлектрические проницаемости при локальном и нелокальном подходе ведут себя по разному, а магнитная проницаемость при использовании обоих подходов совпадает, она имеет Лоренцев вид, что связано с возбуждением циркулярных токов в металлических нанонитях и появлением магнитного отклика. Было показано, что при нормальном падении z-компоненты магнитной и диэлектрической проницаемостей не участвуют в формировании спектров пропускания и отражения. Вторым немаловажным результатом является возможность предсказывать с помощью нелокального подхода оптические спектры на углах падения, существенно отличных от нормальных. Тем не менее, локальный и нелокальный методы восстановления одинаково точно воспроизводят спектры при углах падения, близких к нормальным.

В работе уделяется внимание тому факту, что в случае локальных восприимчивостей диэлектрическая проницаемость имеет анти-Лоренцев вид около резонансной частоты. Это приводит к появлению отрицательной мнимой части, что авторы считают явным недостатком. Проблема устраняется при рассмотрении нелокального отклика, более того, диэлектрическая проницаемость становится больше похожа на зависимость Друде в металлах. Здесь стоит сделать замечание, что электрическое и магнитное поле в этой структуре неотделимы, и определить, поглощает ли среда поле или усиливает, можно с помощью вычисления вектора Умова-Поинтинга. В самом деле, поток энергии в данной точке пространства определяется выражением

$$\operatorname{div} \vec{S} = \operatorname{div} \frac{c}{8\pi} [\vec{E} \times \vec{H}^*]. \quad (6)$$

Если эта действительная часть этой величины положительна, то поток уносит энергию и энергия поля в точке убывает, а среда является поглощающей. Воспользуемся формулами векторного анализа, уравнениями Максвелла с временной зависимостью $\exp(-i\omega t)$ и уравнениями (1), после чего уравнение (6)

приобретает вид:

$$\operatorname{div} \vec{S} = \frac{c}{8\pi} (\vec{H}^* \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H}^*) = \frac{c}{8\pi} \left(\frac{i\omega}{c} \right) (\mu |\vec{H}|^2 - \varepsilon^* |\vec{E}|^2 + \vec{H}^* \zeta \vec{E} - \vec{E} \xi^* \vec{H}^*). \quad (7)$$

Отсюда явно видно, что сама по себе отрицательная мнимая часть не делает среду усиливающей, необходимо учитывать совокупный эффект. Как видно из тех же графиков на Рис. 3, мнимая часть магнитной проницаемости положительна и на порядок превосходит модуль мнимой части диэлектрической проницаемости. Таким образом, наличие отрицательных значений мнимой части ε на самом деле не приводит к неустойчивости отклика и никак не может считаться недостатком локального описания отклика.

1.2 Плазмоны

Плазмоны представляют собой колебания поверхностной и объемной плотности заряда. При возбуждении их электромагнитным полем на поверхности проводника они представляют собой волны, распространяющиеся вдоль границы раздела двух сред, с амплитудами, затухающими экспоненциально при удалении от границы. Такие плазмоны называются поверхностными плазмон-поляритонами (ППП). Впервые их теоретическое описание было изложено Фано в работе [15], где давалось объяснение аномалиям Вуда-Фано в спектрах пропускания металлических дифракционных решеток [16]. В настоящее время интерес к плазмонам возобновился, т.к. стало возможным создавать металлические структуры наномасштабов, в которых плазмонные резонансы будут происходить на определенных частотах и в определенных местах.

Стоит отметить некоторые свойства поверхностных плазмонов (проиллюстрированы на Рис. 4):

1. Импульс ППП оказывается больше, чем импульс возбуждающей его световой волны в вакууме. Дисперсионное уравнение ППП выглядит так

$$k_{SP} = k_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_d \varepsilon_m}{\varepsilon_d + \varepsilon_m}} \quad (8)$$

Диэлектрическая проницаемость металла $\varepsilon_m < 0$ должна зависеть от частоты и быть разного знака с проницаемостью диэлектрика ε_d , причем $|\varepsilon_m| > \varepsilon_d$.

2. В то время как ППП распространяется вдоль поверхности, вглубь волна экспоненциально затухает и является эванесцентной, что обеспечивает поверхностную сущность эффекта и невозможность излучения в открытое пространство объемной волны.

3. Распространены три метода достижения фазового синхронизма, необходимого для возбуждения ППП: нарушение полного внутреннего отражения в призме, рассеяние на дефекте поверхности и возбуждение при помощи поверхностной решетки. Последний метод был исследован Вудом до открытия эффекта ППП при изучении дифракции света на металлических решетках. Важно, что достижение фазового синхронизма с помощью периодической ре-

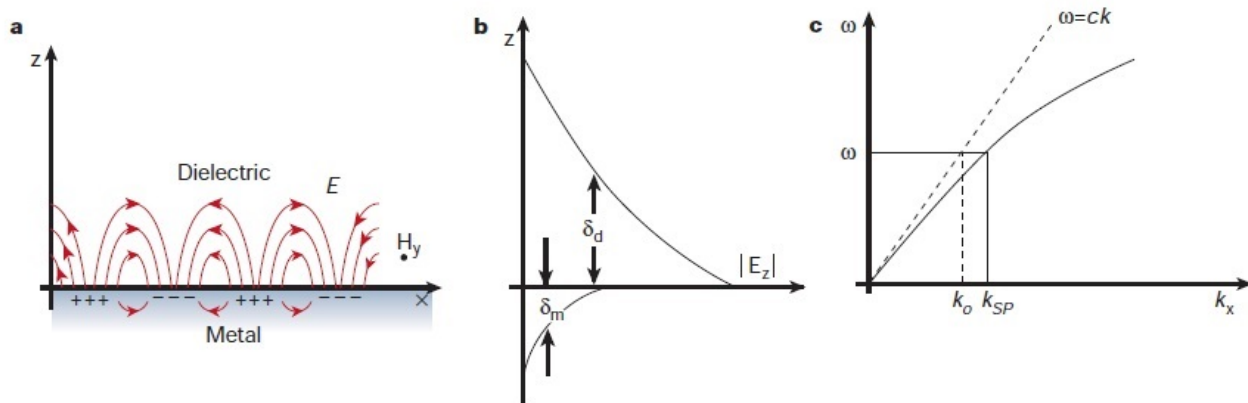


Рисунок 4 – Схема распределения полей вблизи поверхностного плазмона на границе металл-диэлектрик и закон дисперсии, взятая из работы [17]. На левом рисунке изображены силовые линии электрического поля E и магнитного H , плюсами и минусами условно обозначено место скопления положительного и отрицательного заряда. Электрическое поле на границе направлено по нормали к поверхности раздела, магнитное перпендикулярно направлению колебаний заряда и направлено вдоль границы раздела сред. На изображении посередине изображено затухание электрического поля при удалении от границы раздела двух сред по нормали. Затухание в металле оказывается существенно больше, чем в диэлектрике. Справа изображен закон дисперсии плазмонов. Действительно, с учетом того, что характерный вид зависимости диэлектрической проницаемости описывается моделью Друде, при возрастании энергии отрицательная проницаемость ϵ_m уменьшается в своем абсолютном значении до ϵ_d , и правая часть уравнения (8) неограниченно возрастает. Выше по энергии условие существования плазмонов нарушается.

шетки позволяет не только эффективно возбуждать ППП, но и реализовывать обратный процесс излучения плазмоном электромагнитной волны во внешнее пространство.

4. Распространение ППП обусловлено потерями в металле на частоте ППП:

$$\delta_{SP} = \frac{1}{2k''_{SP}} = \frac{c}{\omega} \left(\frac{\varepsilon'_m + \varepsilon_d}{\varepsilon'_m \varepsilon_d} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{(\varepsilon'_m)^2}{\varepsilon''_m}, \quad (9)$$

где δ_{SP} - длина распространения, $k_{SP} = k'_{SP} + ik''_{SP}$ - волновой вектор поверхностного плазмона, и $\varepsilon_m = \varepsilon'_m + i\varepsilon''_m$ - диэлектрическая проницаемость металла. Сейчас существуют возможности создания плазмонных элементов, гораздо меньших длины распространения плазмона, что позволяет успешно интегрировать их в плазмонные контуры.

В фотонике одним из основных достижений стало открытие материалов с запрещенной фотонной зоной. Такими свойствами обладают, например, фотонные кристаллы. При использовании металлических решеток с периодом менее половины эффективной длины волны ППП возможно образование стоячих плазмонных волн и плазмонных запрещенных зон (Рис. 5). Также образование запрещенных фотонных зон возможно при наличии в структуре наночастиц, в которых возникают локальные плазмоны. Не менее интересны применения поверхностных плазмонов в металлических волноводах. Сильная зависимость характеристик волновода от геометрических форм позволяет управлять распространением излучения недоступными ранее способами, например, в десятки раз сжимать длину волны, распространяющейся в волноводе металл-диэлектрик-металл. Эти эффекты достигаются за счет связывания двух плазмонов на поверхностях металлических пластин в волноводе. Аналогично можно управлять скоростью распространения света, достигая существенного замедления. Высокая локализация полей конечно же важна для создания оптических устройств для логических вычислений, хранения и передачи информации. Несмотря на достаточно сильное затухание плазмонов, характерные размеры их локализации все же гораздо меньше, что позволяет эффективно передавать с их помощью сигнал между элементами электронно-оптических контуров на на-

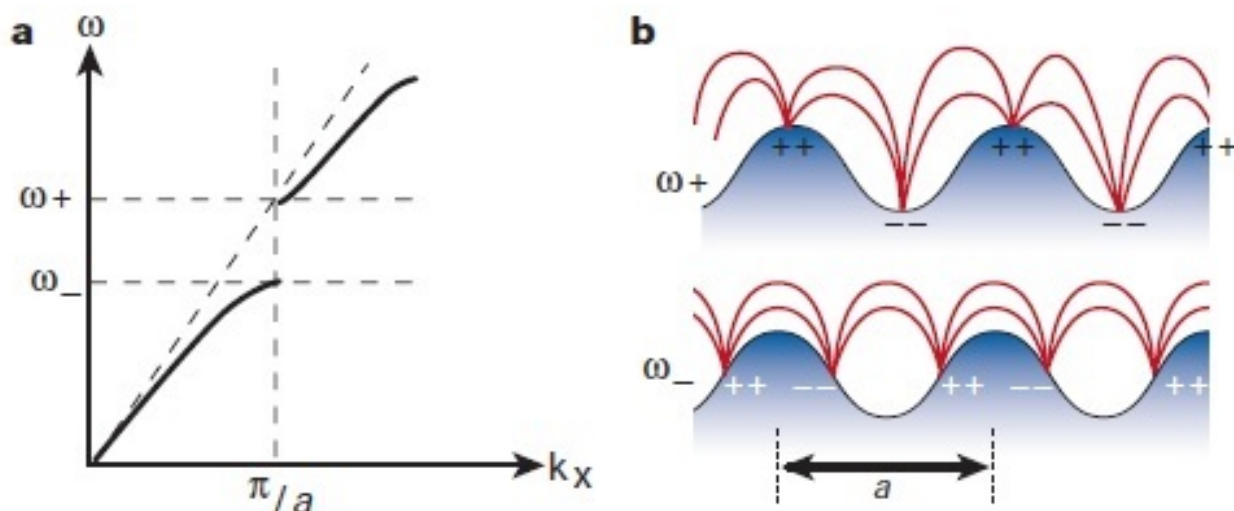


Рисунок 5 – Периодическая структура металла, на поверхности которого возбуждается плазмон, может привести к образованию запрещенной плазмонной зоны. Слева расположен график зависимости частоты от волнового вектора. Видно, что при значении $k_x = \frac{\pi}{a}$ существуют два различных по энергии решения с групповой скоростью близкой к нулю, т.е. стоячие плазмонные зоны. Их образование связано с различным пространственным распределением зарядов на поверхности: для больших частот ω_+ (на правом рисунке сверху) расстояния между зарядами и неоднородность поля оказываются больше, чем в случае ω_- (на правом рисунке снизу). Изображения взяты из работы [17].

номасштабах. Определение пространственного распределения плотности ППП производится с помощью ближнепольных техник, так как плазмоны находятся вблизи границ и имеют субволновые размеры. Для изучения распределения полей на поверхности металла успешно применяется, например, фотонная сканирующая туннельная микроскопия. Наиболее важным для нашей работы применением плазмонов является, конечно же, возможность управления локальными восприимчивостями композитных структур, в том числе получения отрицательного показателя преломления в метаматериалах.

Наряду с поверхностными плазмонами интересны эффекты, связанные с возбуждением локализованных плазмонов - решений задачи о свободных квазистатических колебаниях в наночастицах. Технологии электронно-лучевой

литографии, травления сфокусированным ионным пучком, управляемой самосборки позволяют изготавливать сложные системы с металлическими включениями наномасштабов, в которых плазмоны можно возбуждать, направлять и использовать для управления оптическими характеристиками. Плазмоны обладают огромным потенциалом в оптике, хранении информации, микроскопии, сенсорике. Наиболее важным их свойством является способность концентрировать большие плотности энергий в малых объемах благодаря сильному взаимодействию электромагнитных волн с электронами, что в оптическом диапазоне делает их одним из главных инструментов управления светом, поскольку частоты, на которых происходят резонансные процессы, зависят от геометрической формы и размеров включений, их диэлектрического окружения. Сильные усиления полей вблизи плазмонов открывают новые возможности в создании наносенсоров, полезных для проведения Рамановской спектроскопии и исследований ДНК, проведении экспериментов нелинейной оптики с детектированием гармоник высокого порядка. Чувствительность плазмонных резонансов к расстоянию между наночастицами можно использовать для детектирования передвижения молекулярных двигателей – устройств, к которым обращено внимание биологов. Также были предложены методики удаления недоброкачественных опухолей с помощью частиц, в которых возможны плазмонные резонансы. Альтернативное использование плазмонных наночастиц предполагает создание локализованных и узконаправленных детекторов или излучателей, поскольку объединения наночастиц известной формы позволяет использовать их как антенны с известными диаграммами излучения и поглощения. Эти характеристики также необходимы для создания фотонных контуров, которые могли бы преобразовывать электромагнитную волну в плазмон. При распространении в таких контурах плазмон может обрабатываться логическими элементами и снова превращаться в свет. Подобные конструкции открывают новые перспективы в создании устройств обмена информацией, главное место в этих разработках будет принадлежать плазмонике и фотонике.

Зная зависимости полей, соответствующих плазмонным резонансам, от размера, формы и расположения наночастиц, можно эффективно влиять на

спектральные свойства целой системы, в частности, усиливать излучение из квантовых точек или молекул, регулировать спектры отражения и пропускания на необходимых частотах. Детальное исследование резонансов в рассеянии электромагнитных волн на сферических частицах, сопоставимых по размеру с длиной волны, можно найти в работе Ми [18]. Резонансы Ми до сих пор являются актуальной темой для исследований благодаря обширным возможностям применения. В случае, когда металлические наночастицы упорядочены в фотонный кристалл, запаздывание в распространении волны от одной наночастицы к другой приводит к коллективизации локализованных плазмонов в плазмон-поляритонную волну другой природы, чем ППП. Образованию таких плазмон-поляритонов очень способствуют делокализованные резонансы в тех же частях системы, где расположены металлические наночастицы, например, волноводные моды [19]. Более того, установлено [20], [21], что при плавном изменении формы наночастиц от шарообразной к кубической по закону $x^n + y^n + z^n = a^n$ с увеличением n в точке $n=2,5$ происходит специфическое переключение: появляется возможность наблюдать $\varepsilon > -1$, что не удается сделать для частиц в форме сферы.

Немаловажным оказался случай плазмонного возбуждения двух близко расположенных наночастиц. Было показано [20], что помимо двух мод (симметричной и антисимметричной), существующих в диапазоне $\omega < \omega_p/\sqrt{2}$, на малых расстояниях $R_{12}/(2R) < 1,2$ в кластере из двух частиц на частотах $\omega_p > \omega > \omega_p/\sqrt{2}$ возникают сильные симметричные моды. Такие решения соответствуют плазмонным молекулам. Их поляризуемость пропорциональна кубу величины щели между частицами, в то время как обычные моды поляризуются пропорционально объему частиц и существуют на любых расстояниях между частицами. Это приводит к сильной неоднородности поля, из-за чего такие моды активно возбуждаются квантовыми точками или молекулами вблизи щели. Это позволяет говорить о возможности создания эффективных детекторов, наносенсоров единичных молекул или квантовых точек на основе плазмонных молекул.

В предлагаемой работе плазмонам уделяется особое внимание, поскольку именно плазмонные колебания позволяют получать отрицательные ε . Электрическое поле, действующее на электрон, отклоняет его в обратную сторону, вызывая противоположную поляризацию, которая ведет к отрицательности диэлектрической проницаемости на частотах ниже резонансной. Если частота вынуждающего электрического поля больше резонансной, то, подобно тому, как груз на пружине начинает раскачиваться в противофазе со слишком частой вынуждающей силой, отрицательно заряженный электрон начинает колебаться синфазно с электрическим полем. Отрицательную же магнитную проницаемость удастся получить, когда частота и волновой вектор падающего излучения таковы, что возбуждаемые им движения зарядов в плазмонных частицах направлены в разные стороны, таким образом образуя подобие кругового тока, что непременно приводит к появлению дополнительного магнитного поля (Рис. 6). В условиях, когда действительные части ε и μ отрицательны, показатель преломления следует выбирать с отрицательной действительной частью, что было показано Веселаго [22], [23]. Действительно, если $\varepsilon = -1 + i\delta_1$ и $\mu = -1 + i\delta_2$, так что $0 < \delta_1, \delta_2 \ll 1$, то вычисляя n , получим:

$$\begin{aligned} n &= \pm\sqrt{\varepsilon\mu} = \pm\sqrt{(-1 + i\delta_1)(-1 + i\delta_2)} = \\ &= \pm\sqrt{(1 - \delta_1\delta_2) - i(\delta_1 + \delta_2)} \approx \pm\left(1 - \frac{i(\delta_1 + \delta_2)}{2}\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Требую теперь $Im(n) > 0$ для выполнения закона сохранения энергии и причинности, стоит выбрать знак минус.

Отрицательный показатель преломления играет важную роль в современной оптике. Еще в работах Мандельштама [24] и Веселаго [22] предсказывалось, что в материалах с отрицательным показателем преломления будет наблюдаться ряд интересных эффектов, таких как обратные эффекты Доплера и Вавилова-Черенкова, возможность использовать плоско-параллельный слой метаматериала в качестве линзы. Экспериментально подтверждено отрицательное преломление прошедших лучей через метаматериал с отрицательным показателем преломления [25]. Такие метаматериалы интересны для так называемых стелс-технологий, для создания неотражающих покрытий [26], [27]. У

этой идеи, тем не менее, имеется ряд принципиальных ограничений, т.к. известные метаматериалы имеют отрицательный показатель преломления в узком диапазоне частот. Были рассмотрены возможности комбинирования материалов с оптической нелинейностью и материалов с отрицательным показателем преломления. Было обнаружено, что сложенные вместе слои таких материалов приводит к диодо-подобной зависимости коэффициента прохождения. Такие эффекты можно использовать при построении оптических устройств памяти и оптических диодов [28].

1.3 Использование наночастиц в создании функциональных материалов

Композитная среда, состоящая из металлических включений, упорядоченно или периодически расположенных внутри диэлектрика в длинноволновом приближении ведет себя как однородная среда, причем характеристики такого вещества могут быть отличными от тех, что наблюдаются в обычных материалах. Так, например, отрицательной диэлектрической проницаемости можно добиться, если в качестве включений использовать металлические нити, которые будут приносить плазменный характер электрического отклика. Отрицательного магнитного отклика можно добиться, создавая наноконтурные с высокой магнитной поляризуемостью в резонансном диапазоне. В работах [29] и [30] было предложено делать материалы с целевыми резонаторами внутри, которые создавали бы контуры с эффективными индуктивностью и емкостью. Магнитное поле, ориентированное перпендикулярно плоскости колец, возбуждает противоположно ориентированное магнитное поле согласно закону Ленца, что вызывает диамагнитный отклик. Также отрицательный магнитный отклик был обнаружен в структуре, состоящей из пар параллельных серебряных нитей. Причина возникновения такого отклика - противоположно направленные токи, возбужденные перпендикулярным магнитным полем. Результаты были позднее получены и для оптических частот, для них проведен анализ и предложено описание эффекта с помощью эффективного LC контура.

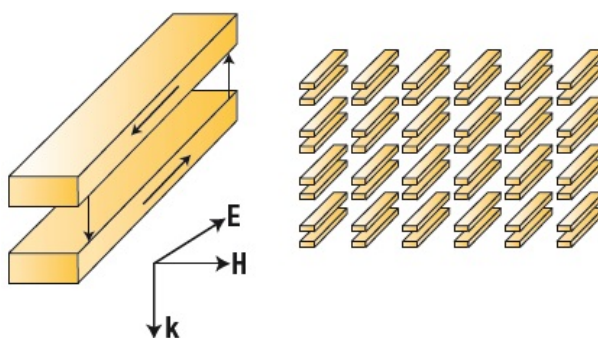


Рисунок 6 – Возбуждение магнитного резонанса в паре металлических наностержней и схема метаматериала, состоящего из таких частиц.

Одной из наиболее удачных попыток сделать материал с отрицательным μ является двойная рыболовная сеть с нитями разной толщины по двум разным направлениям. Более широкие нити реализуют магнитный резонанс и отрицательный μ , а узкие нити обеспечивают отрицательный ε . Есть и другой подход - объединить материал с магнитным резонансом и металл, который сам по себе имеет отрицательный ε . На роль таких материалов подходят серебро и золото, у этих металлов плазменная частота располагается выше оптического диапазона. В этом подходе, тем не менее, имеется проблема: большое абсолютное значение ε при относительно малых μ ведет к возникновению большого импеданса и, соответственно, большому коэффициенту отражения. Для разрешения этого вопроса предлагается использовать смеси металлических частиц перемешанных в толще диэлектрика. Такой метаматериал можно изготовить с помощью технологии осаждения газа металлических частиц на диэлектрическую подложку.

В качестве колебательного контура можно использовать щелевые кольцевые резонаторы. Композитный материал, состоящий из таких резонаторов, показывает отрицательные значения магнитной проницаемости на частотах около резонансной и выше. Комбинация таких включений позволяет создавать материалы с одновременно отрицательными диэлектрической и магнитной восприимчивостью и, как следствие, отрицательным показателем преломления. Однако, стоит принять во внимание, что включение частиц, обладающих электромагнитными резонансами, неизбежно приводит к изменению поляризации излучения, с которыми эти частицы взаимодействуют. Таким образом, кросс-поляризационные эффекты являются неотъемлемой частью описания метаматериалов с отрицательным показателем преломления. В работе [31] приведен метод описания взаимодействия уединенного щелевого резонатора с внешним магнитным полем, нормально падающим на плоскость резонатора. Длина волны излучения в вакууме предполагается много превышающей линейные размеры металлического включения. Показано, что резонатор является собой распределенный колебательный контур, содержащий в себе индуктивность и емкость. Частица обладает магнитной поляризуемостью по нормали к плоской поверхности, которая к тому же имеет диамагнитные свойства выше резонанс-

ной частоты. Детальное рассмотрение, однако, показывает, что такая частица обладает не только магнитным дипольным моментом, но и электрическим дипольным моментом вследствие разного знака зарядов на двух половинках щелевого резонатора. По этой причине возникает поляризация вдоль оси y , расположенной в плоскости резонатора. Наиболее интересны обнаруженные эффекты влияния магнитного поля, направленного по оси z , на электрическую поляризацию частицы по оси y , а также влияние электрического поля, направленного по оси y , на магнитную поляризацию по оси z . Общий отклик уединенной частицы будет характеризоваться поляризациями p_x, p_y, m_z , что явно показывает наличие бианизотропии. При условии корректного усреднения полученных результатов в среде, состоящей из таких частиц в толще диэлектрика, эффективные параметры описания среды будут содержать не только диэлектрическую и магнитную проницаемости, но и бианизотропию. Авторы указывают, что в более ранних исследованиях было установлено, что однородное описание может быть успешно применено, когда длина волны излучения в вакууме по крайней мере в 10 раз превышает размер трансляционной ячейки метаматериала. В дальнейшем в работе рассмотрено падение электромагнитной волны на слой метаматериала таким образом, чтобы магнитное поле было перпендикулярно плоскости щелевых резонаторов, а электрическое поле и волновой вектор лежат в плоскости резонатора. Для такой геометрии были получены все ненулевые компоненты, а именно $\chi_{eyy}, \chi_{exx}, \kappa_{yz}$ и χ_{mzz} , входящие в материальные уравнения

$$\vec{D} = (1 + 4\pi\chi_e)\vec{E} - i\kappa\vec{H} \quad (11)$$

$$\vec{B} = i\kappa^T\vec{E} + (1 + 4\pi\chi_m)\vec{H} \quad (12)$$

и получено дисперсионное уравнение

$$k_x = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu_{zz}\varepsilon_{yy} - \kappa_{yz}^2} \quad (13)$$

Такой его вид, в отличие от простого случая $k_x = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu_{zz}\varepsilon_{zz}}$, реализует запрещенную ($\mu_{zz}\varepsilon_{yy} - \kappa_{yz}^2 < 0$) и разрешенную зону ($\mu_{zz}\varepsilon_{yy} - \kappa_{yz}^2 > 0$). Другая

поляризация особенностей не обнаруживает, поскольку связь магнитного поля и x-компоненты электрического поля отсутствует.

Более полное рассмотрение вопроса было проделано в работе [32]. В ней авторы исследовали возможность получения аналитических формул восстановления локальных восприимчивостей по известным параметрам рассеяния. В качестве образца был исследован метаматериал с двумя щелевыми резонаторами, вставленными друг в друга, как показано на Рис. 7. Материальные уравнения в

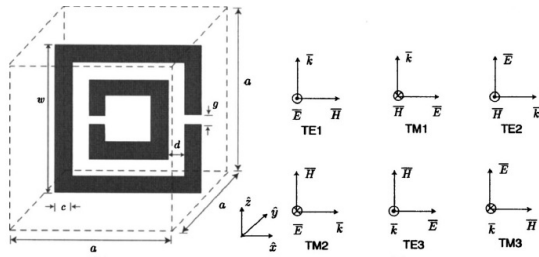


Рисунок 7 – Схематическое изображение ячейки метаматериала с двумя щелевыми резонаторами из работы [32] и изображение 6 вариантов поляризации падающего излучения.

Поляризация	Дисперсионное соотношение	z	n
TE1	$k_z^2 = k_0^2 \epsilon_y \mu_x$	$\sqrt{\mu_x / \epsilon_y}$	$\sqrt{\epsilon_y \mu_x}$
TM1	$k_z^2 = k_0^2 (\epsilon_x \mu_y - \epsilon_x / \epsilon_z \xi_0^2)$	$\frac{\epsilon_x}{\sqrt{\epsilon_x \mu_y - \epsilon_x / \epsilon_z \xi_0^2}}$	$\sqrt{\epsilon_x \mu_y - \epsilon_x / \epsilon_z \xi_0^2}$
TE2	$k_x^2 = k_0^2 (\epsilon_z \mu_y - \xi_0^2)$	$\frac{\mu_y}{\sqrt{\epsilon_z \mu_y - \xi_0^2 + i \xi_0}}$	$\sqrt{\epsilon_z \mu_y - \xi_0^2}$
TM2	$k_x^2 = k_0^2 \epsilon_y \mu_z$	$\sqrt{\epsilon_y / \mu_z}$	$\sqrt{\epsilon_y \mu_z}$
TE3	$k_y^2 = k_0^2 \epsilon_x \mu_z$	$\sqrt{\mu_z / \epsilon_x}$	$\sqrt{\epsilon_x \mu_z}$
TM3	$k_y^2 = k_0^2 (\epsilon_z \mu_x - \mu_x / \mu_y \xi_0^2)$	$\frac{\epsilon_z}{\sqrt{\epsilon_z \mu_x - \mu_x / \mu_y \xi_0^2}}$	$\sqrt{\epsilon_z \mu_x - \mu_x / \mu_y \xi_0^2}$

Рисунок 8 – Таблица дисперсионных соотношений, импедансов z и показателей преломления n для различных поляризаций излучения, падающего на метаматериал. Метаматериал описывается уравнениями (14), (15)

среде соответствуют тем, что были обозначены в статье [31]:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon \cdot \vec{E} + \xi \cdot \vec{H} \\ \vec{B} &= \mu \cdot \vec{H} + \zeta \cdot \vec{E} \end{aligned} \quad (14)$$

причем локальные восприимчивости имеют следующий вид:

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{pmatrix}. \quad (15)$$

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i \xi_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \zeta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \xi_0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Для таких условий приведена схема последовательных действий, приводящих к поэтапному восстановлению ε , μ и ξ . При этом, однако, требуется исследовать спектры прохождения и отражения электромагнитного излучения для трех перпендикулярных направлений падения волны и, соответственно, шести различных поляризаций (Рис. 7).

Помимо аналитических выражений для коэффициентов в материальных уравнениях и интересной, но достаточно трудоемкой процедуры их вычисления, в статье отображены законы дисперсии (Рис. 8), которые вытекают из требования возможности разрешения уравнений Максвелла. Например, в случае из работы [31] уравнения

$$\vec{k} \times \vec{E} = \frac{\omega}{c} \vec{B} \quad \vec{k} \times \vec{H} = -\frac{\omega}{c} \vec{D} \quad (17)$$

в сочетании с материальными уравнениями дают систему

$$\begin{pmatrix} i\frac{\omega}{c}\kappa_{yz} - k & \mu_{zz}\frac{\omega}{c} \\ -\frac{\omega}{c}\varepsilon & i\frac{\omega}{c}\kappa_{yz} + k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y \\ H_z \end{pmatrix} = 0 \quad (18)$$

откуда и получается дисперсионное уравнение.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЦЫ РАССЕЙЯНИЯ

Для расчета матрицы рассеяния воспользуемся разложением электромагнитного поля по плоским волнам, процедура известна в литературе как метод гармоник Фурье [33]. Метод гармоник Фурье имеет ограничения применимости: однородность слоя по одному направлению и пространственная периодичность по двум другим. Моделируемые материалы безусловно удовлетворяют этим требованиям. Метод работает не только в прямоугольных координатах $O\vec{x}^1\vec{x}^2\vec{x}^3$, так что для более общего подхода сформулируем процедуру в косоугольной системе

$$\begin{aligned}x &= \vec{x}^1 = x^1 + x^2 \sin \zeta + x^3 \sin \chi \cos \xi, \\y &= \vec{x}^2 = x^2 \cos \zeta + x^3 \sin \chi \sin \xi, \\z &= \vec{x}^3 = x^3 \cos \chi\end{aligned} \quad (19)$$

Имея два направления периодичности x_1 и x_2 и полагая структуру инвариантной относительно любых трансляций вдоль третьей оси,

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\alpha\beta}(x^1 + mP^1, x^2 + nP^2, x^3) &= \varepsilon^{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3), \\ \mu^{\alpha\beta}(x^1 + mP^1, x^2 + nP^2, x^3) &= \mu^{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3),\end{aligned} \quad (20)$$

воспользуемся известной теоремой Блоха и представим решения уравнений Максвелла для электрического и магнитного полей в виде:

$$U_\alpha(x^1, x^2, x^3) = \exp(ik_1x^1 + ik_2x^2)u_\alpha(x^1, x^2, x^3). \quad (21)$$

Здесь $\alpha = 1, 2, 3$; k_0 - модуль волнового вектора падающего излучения, $k_1 = k_0n_0 \sin \theta \cos \phi$, $k_2 = k_0n_0 \sin \theta \cos(\phi + \zeta)$ - латеральные компоненты волнового вектора внутри структуры в косоугольной геометрии (Рис. 9); U_α - это проекция электрического или магнитного поля на направление x^α . $u_\alpha(x_1, x_2, x_3)$ также периодична по направлениям x_1 и x_2 с периодами P_1 и P_2 соответственно. Подставим блоховские волны электромагнитного поля в уравнения Максвелла ($\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ обозначает полностью антисимметричный символ Леви-Чивиты)

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta E_\gamma &= ik_0 \mu^{\alpha\beta} H_\beta \\ \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta H_\gamma &= -ik_0 \varepsilon^{\alpha\beta} E_\beta\end{aligned} \quad (22)$$

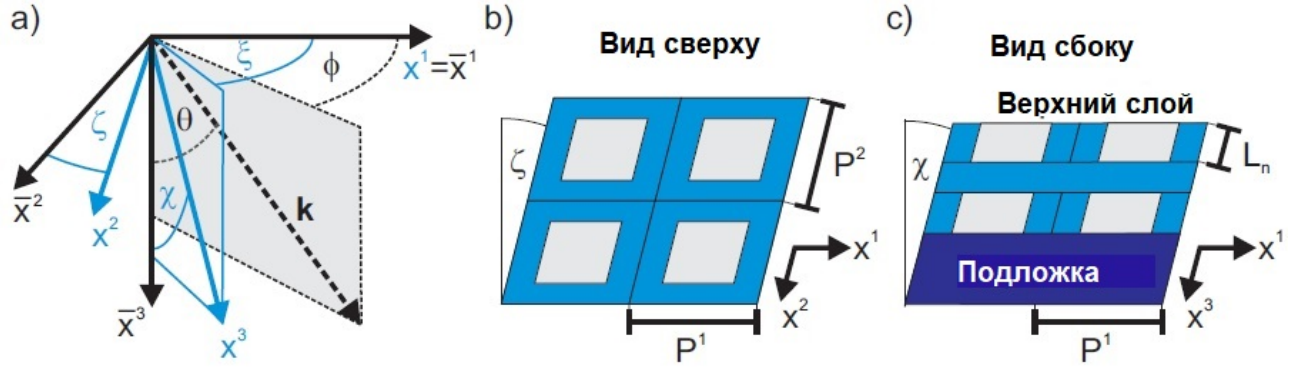


Рисунок 9 – Изображение изучаемой периодической структуры (b, c) и сопряженной с ней косоугольной системы координат (a).

Например, для ротора магнитного поля при $\alpha = 1$ имеем:

$$ik_2 h_3 + \partial_2 h_3 - \partial_3 h_2 = -ik_0 \sum_{\beta} \varepsilon^{1\beta} e_{\beta} \quad (23)$$

Взяв дискретное Фурье-преобразование, получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} (k_2 + G_{2n})H_{3mn} + i\partial_3 H_{2mn} &= -k_0 \sum_{\alpha,p,q} \hat{\varepsilon}_{mn,pq}^{1\alpha} E_{\alpha pq} \\ -i\partial_3 H_{1mn} - (k_1 + G_{1m})H_{3mn} &= -k_0 \sum_{\alpha,p,q} \hat{\varepsilon}_{mn,pq}^{2\alpha} E_{\alpha pq} \\ (k_1 + G_{1m})H_{2mn} - (k_2 + G_{2n})H_{1mn} &= -k_0 \sum_{\alpha,p,q} \hat{\varepsilon}_{mn,pq}^{3\alpha} E_{\alpha pq}. \end{aligned} \quad (24)$$

Аналогично, ротор электрического поля при Фурье-преобразовании распадается на систему уравнений:

$$\begin{aligned} (k_2 + G_{2n})E_{3mn} + i\partial_3 E_{2mn} &= k_0 \sum_{\alpha,p,q} \hat{\mu}_{mn,pq}^{1\alpha} H_{\alpha pq} \\ -i\partial_3 E_{1mn} - (k_1 + G_{1m})E_{3mn} &= k_0 \sum_{\alpha,p,q} \hat{\mu}_{mn,pq}^{2\alpha} H_{\alpha pq} \\ (k_1 + G_{1m})E_{2mn} - (k_2 + G_{2n})E_{1mn} &= k_0 \sum_{\alpha,p,q} \hat{\mu}_{mn,pq}^{3\alpha} H_{\alpha pq}. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь мы обозначили Фурье-образы полей и проницаемостей следующим образом:

$$\begin{aligned}
 U_{\alpha mn}(x^3) &= \frac{1}{P^1 P^2} \int_V u_\alpha(x^1, x^2, x^3) \exp(-iG_{1m}x^1 - iG_{2n}x^2) dx^1 dx^2, \\
 \hat{\sigma}_{mn,pq}^{\alpha\beta}(x^3) &= \frac{1}{P^1 P^2} \int_V \sigma^{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3) \times \\
 &\quad \times \exp(-i(G_{1m} - G_{1p})x^1 - i(G_{2n} - G_{2q})x^2) dx^1 dx^2.
 \end{aligned} \tag{26}$$

$G_{\alpha m} = 2\pi m/P^\alpha$ - вектор обратной решетки по направлению α , V - объем ячейки периодичности. В дальнейшем будем обозначать $k_\alpha + G_{\alpha n} = K_{\alpha n}$.

Как видно, уравнения записаны для Фурье-разложения по полному базису функций. В усеченном варианте Фурье-преобразование проводится по ограниченному количеству гармоник, этот подход используется для численного моделирования. Фурье-образ от кусочно-заданной функции (такой, как тензоры ε и μ на границе двух сред) дает плохо сходящийся ряд, который к тому же обладает неустраняемыми артефактами. Для решения этой проблемы (напомним, в правых частях полученной системы уравнений стоит Фурье-образ непрерывных на границе индукций полей) применяются так называемые правила Ли [34], разработанные специально для Фурье-преобразований подобного рода. Правила используют следующую идею: в случае, когда требуется взять Фурье-преобразование от произведения f двух функций g и h , имеющих разрывы в одной и тех же точках, причем произведение этих функций заведомо непрерывно в этих точках, вычисления нужно проводить по схеме

$$\vec{f} = [g^{-1}]^{-1} \vec{h} \quad \text{вместо} \quad \vec{f} = [g] \vec{h}. \tag{27}$$

В этих обозначениях вектора \vec{f} , \vec{h} есть вектора преобразованных функций в усеченном Фурье-базисе, а $[g]$ и $[g^{-1}]$ являются квадратными матрицами, которые возникают после Фурье-преобразования с использованием традиционного правила факторизации.

Теперь необходимо избавиться от Фурье-гармоник продольной x^3 компоненты полей. Для этого воспользуемся выкладками, полученными в работе [35], сразу представив результат в удобной форме. Определим новые тензорные

выражения, сопоставляя блочные матрицы $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\mu}$ с блочными 3×3 матрицами $\hat{\varepsilon} = \{\hat{\varepsilon}_{mn,pq}^{\alpha\beta}\}$, $\hat{\mu} = \{\hat{\mu}_{mn,pq}^{\alpha\beta}\}$ по правилу:

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{11} - \varepsilon^{13}(\varepsilon^{33})^{-1}\varepsilon^{31} & \varepsilon^{12} - \varepsilon^{13}(\varepsilon^{33})^{-1}\varepsilon^{32} & \varepsilon^{13}(\varepsilon^{33})^{-1} \\ \varepsilon^{21} - \varepsilon^{23}(\varepsilon^{33})^{-1}\varepsilon^{31} & \varepsilon^{22} - \varepsilon^{23}(\varepsilon^{33})^{-1}\varepsilon^{32} & \varepsilon^{23}(\varepsilon^{33})^{-1} \\ (\varepsilon^{33})^{-1}\varepsilon^{31} & (\varepsilon^{33})^{-1}\varepsilon^{32} & (\varepsilon^{33})^{-1} \end{pmatrix}, \quad (28)$$

аналогично для тензора магнитной проницаемости. Теперь, используя эти выражения, запишем уравнения распространения гармоник продольных компонент полей вдоль оси x^3 :

$$-i\partial_3 \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{E}}_{\parallel} \\ \vec{\mathcal{H}}_{\parallel} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{N}}(\tilde{\mu}, \tilde{\varepsilon}) & -\vec{\mathcal{L}}(\tilde{\mu}, \tilde{\varepsilon}) \\ \vec{\mathcal{L}}(\tilde{\mu}, \tilde{\varepsilon}) & \vec{\mathcal{N}}(\tilde{\mu}, \tilde{\varepsilon}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{E}}_{\parallel} \\ \vec{\mathcal{H}}_{\parallel} \end{pmatrix} \quad (29)$$

Выражение 29 — цель всех сделанных нами преобразований, основная формула, в которой мы очередной раз для простоты ввели компактные обозначения, а именно:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{N}}(A, B) &= \begin{pmatrix} -A^{23}\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1 B^{31} & A^{23}\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_1 B^{32} \\ A^{13}\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_2 B^{31} & -A^{13}\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2 B^{32} \end{pmatrix}, \\ \hat{\mathcal{L}}(A, B) &= \frac{1}{k_0} \begin{pmatrix} -k_0^2 A^{21} - \mathbf{K}_1 B^{33}\mathbf{K}_2 & -k_0^2 A^{22} + \mathbf{K}_1 B^{33}\mathbf{K}_1 \\ k_0^2 A^{11} - \mathbf{K}_2 B^{33}\mathbf{K}_2 & k_0^2 A^{12} - \mathbf{K}_2 B^{33}\mathbf{K}_1 \end{pmatrix}, \\ (\mathbf{K}_\alpha)_{mn,pq} &= (k_\alpha + G_{\alpha n})\delta_{mp}\delta_{nq}. \end{aligned} \quad (30)$$

К тому же:

$$\vec{\mathcal{F}}_{\parallel} = \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{E}}_{\parallel} \\ \vec{\mathcal{H}}_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathcal{E}}_{\parallel} = \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{E}}_1 \\ \vec{\mathcal{E}}_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{\mathcal{H}}_{\parallel} = \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{H}}_1 \\ \vec{\mathcal{H}}_2 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Каллиграфический вектор $\vec{\mathcal{U}}_\alpha$ состоит из Фурье-компонент продольного по α поля, приведенных по образцу выражения (26).

Поскольку мы предполагаем трансляционную инвариантность вдоль оси x^3 , матрица дифференциального уравнения, определяющая распространение волн в среде также постоянна вдоль этой оси, а значит, решение стоит искать в простейшем виде

$$\lambda \vec{\mathcal{F}}_{\parallel} = \mathcal{M} \vec{\mathcal{F}}_{\parallel}. \quad (32)$$

Поля в n -ом слое структуры в этом случае примут вид

$$U_{\alpha}^{(n)}(x^1, x^2, x^3) = e^{ik_1x^1 + ik_2x^2 + i\lambda_n x^3} \sum_{p,q} U_{\alpha pq}^{(n)} e^{iG_{1p}x^1 + iG_{2q}x^2}. \quad (33)$$

Заметим, что мы пришли к задаче на собственные значения и собственные векторы матрицы M , полученной из преобразования уравнений Максвелла с использованием Фурье-преобразования полей блоховского вида. Получившиеся собственные векторы в соответствии с этими соображениями называют Модами Фурье-Блоха. Их распространение обусловлено положительной или отрицательной мнимой частью собственных значений, которые мы обозначим $\{\lambda_n^{\pm}\}$.

Поскольку аналитические вычисления бесконечного Фурье-ряда в общем случае может оказаться весьма трудоемкой задачей, мы предпочтем ограничиться численным моделированием задачи в усеченном пространстве Фурье с $(2N_1 + 1) \times (2N_2 + 1)$ гармониками. Соответственно, в $G_{\alpha m} = 2\pi m/P^{\alpha}$ предполагается, что $m = 0, \pm 1, \dots, \pm N_{\alpha}$. Теперь запишем вид Фурье-гармоник в координатном пространстве:

$$\begin{bmatrix} \vec{\mathcal{E}}_{\parallel}(x^3) \\ \mathcal{H}_{\parallel}(x^3) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathcal{E}_{\parallel}^{+} & \mathcal{E}_{\parallel}^{-} \\ \mathcal{H}_{\parallel}^{+} & \mathcal{H}_{\parallel}^{-} \end{pmatrix}}_{\equiv \mathcal{F}_{\parallel}} \begin{bmatrix} \exp(i\Lambda^{+}x^3) & 0 \\ 0 & \exp(i\Lambda^{-}x^3) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{A}^{+} \\ \vec{A}^{-} \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Вектора \vec{A}^{\pm} представляют собой набор коэффициентов, определяющих комплексную амплитуду гармоник в точке $x^3 = 0$. Распространение волн, как видно, определяется экспоненциальными множителями. Λ^{\pm} - диагональная матрица из соответствующих элементов λ_n^{\pm} . Матрицы распространяющихся вдоль и против направления оси x^3 полей $\mathcal{H}_{\parallel}^{\pm}, \mathcal{E}_{\parallel}^{\pm}$ образуют матрицу \mathcal{F}_{\parallel} .

Можно добиться упрощения полученного уравнения на собственные значения. В частности, если положить, что $\varepsilon^{3\alpha}, \varepsilon^{\alpha 3}$ равны нулю для $\alpha \neq 0$, точно так же, как и соответствующие компоненты магнитной проницаемости, то можно заметить равенство нулю тензора $\hat{\mathcal{N}}$. Дифференциальное уравнение (29) теперь можно решить, находя решение системы

$$(\lambda_n^{\pm})^2 \vec{\mathcal{E}}_{\parallel n}^{\pm} = -\hat{\mathcal{L}}(\tilde{\mu}, \tilde{\varepsilon}) \hat{\mathcal{L}}(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\mu}) \vec{\mathcal{E}}_{\parallel n}^{\pm}. \quad (35)$$

Здесь n отвечает различным собственным векторам и собственным значениям. Поэтому для простоты введем одну диагональную матрицу Λ с элементами $\lambda_n^+ = -\lambda_n^-$ и все соответствующие собственные вектора объединим в матрицу \mathcal{E}_{\parallel} . Магнитное поле при этом будет выражено через

$$\mathcal{H}_{\parallel}^{\pm} = \pm \mathcal{H}_{\parallel}, \quad \mathcal{H}_{\parallel} = \hat{\mathcal{L}}(\tilde{\varepsilon}, \tilde{\mu}) \mathcal{E}_{\parallel} \Lambda^{-1}, \quad (36)$$

а матрица \mathcal{F}_{\parallel} предстанет в виде

$$\mathcal{F}_{\parallel \text{ simple}} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{\parallel} & \mathcal{E}_{\parallel} \\ \mathcal{H}_{\parallel} & -\mathcal{H}_{\parallel} \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Можно продвинуться далее в вычислениях, если рассматривать преобразования координат типа $\partial \vec{x}^{\alpha} / \partial x^{\beta} = \text{const}$, а слои материала считать однородными и изотропными. В этом случае матрицы $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\mu}$ примут простой вид

$$\tilde{f}_{mn,pq}^{\alpha\beta} = \delta_{mp} \delta_{nq} \tilde{g}^{\alpha\beta} \times \begin{cases} f^{-1} & \text{для } \alpha = \beta = 3 \\ 1 & \text{для } \alpha = 3 \text{ XOR } \beta = 3 \\ f & \text{иначе} \end{cases} \quad (38)$$

Проведя несложные преобразования в системе уравнений (32), можно обнаружить, что они распадаются на независимые части для различных Фурье-гармоник:

$$\begin{aligned} (\lambda_{mn} + K_{1m} \tilde{g}^{13} + K_{2n} \tilde{g}^{23}) \begin{pmatrix} E_{1mn} \\ E_{2mn} \end{pmatrix} &= -L_{mn} \begin{pmatrix} H_{1mn} \\ H_{2mn} \end{pmatrix}, \\ (\lambda_{mn} + K_{1m} \tilde{g}^{13} + K_{2n} \tilde{g}^{23}) \begin{pmatrix} H_{1mn} \\ H_{2mn} \end{pmatrix} &= \frac{\varepsilon}{\mu} L_{mn} \begin{pmatrix} E_{1mn} \\ E_{2mn} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (39)$$

причем 2x2 матрица L_{mn} определена как

$$L_{mn} = \frac{1}{k_0 \varepsilon} \begin{pmatrix} -k_0^2 \varepsilon \mu \tilde{g}^{21} - K_{1m} \tilde{g}^{33} K_{2n} & -k_0^2 \varepsilon \mu \tilde{g}^{22} + K_{1m} \tilde{g}^{33} K_{1m} \\ k_0^2 \varepsilon \mu \tilde{g}^{11} - K_{2n} \tilde{g}^{33} K_{2n} & k_0^2 \varepsilon \mu \tilde{g}^{12} + K_{2n} \tilde{g}^{33} K_{1m} \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Собственные значения λ_{mn} каждой Фурье-гармоники могут быть извлечены из пары предыдущих уравнений:

$$(\lambda_{mn} + K_{1m} \tilde{g}^{13} + K_{2n} \tilde{g}^{23})^2 \begin{pmatrix} U_{1mn} \\ U_{2mn} \end{pmatrix} = -\frac{\varepsilon}{\mu} L_{mn}^2 \begin{pmatrix} U_{1mn} \\ U_{2mn} \end{pmatrix} \quad (41)$$

Здесь за $U_{\alpha mn}$ как обычно обозначены $E_{\alpha mn}$ и $H_{\alpha mn}$.

Поскольку L_{mn}^2 диагональна и находится в соотношении

$$-\frac{\varepsilon}{\mu}L_{mn}^2 = \left(\frac{K_{mn}^3}{g^{33}}\right)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (42)$$

где K_{mn}^3 определена как

$$K_{mn}^3 = \left\{ g^{33} \left[k_0^2 \varepsilon \mu - (K_{1m})^2 g^{11} - (K_{2n})^2 g^{22} - 2K_{1m}K_{2n}g^{12} \right] + (K_{1m}g^{13} + K_{2n}g^{23})^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (43)$$

можно выписать явный вид собственных значений λ_{mn}^{\pm} :

$$K_{3mn}^{\pm} \equiv \lambda_{mn}^{\pm} = \frac{1}{g^{33}} \left[\pm K_{mn}^3 - (K_{1m}g^{13} + K_{2n}g^{23}) \right]. \quad (44)$$

Окончательно, приведем здесь аналитическое решение

$$E_{\alpha}^{(\beta, m, n, \pm)}(x^1, x^2, x^3) = e_{\alpha mn}^{\beta \pm} e^{iK_{1m}x^1 + iK_{2n}x^2 + iK_{3mn}^{\pm}x^3}. \quad (45)$$

$e_{\alpha mn}^{\beta \pm}$ определяет поляризацию, это единичный вектор. Индекс β может обозначать как x или y направление, так и направление, соответствующее s/p поляризации или циркулярно поляризованным волнам.

Теперь стоит сделать замечание по поводу формализма матрицы рассеяния. Поскольку мы имеем дело с усеченным рядом Фурье векторного поля, то соответствующая матрица должна связывать амплитуды гармоник. Тогда

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \vec{A}_N^+ \\ \vec{A}_1^- \end{pmatrix}}_{\equiv |0\rangle} = \underbrace{\begin{pmatrix} S_{N1}^{++} & S_{NN}^{+-} \\ S_{11}^+ & S_{1N}^- \end{pmatrix}}_{\equiv S_{N1}} \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{A}_1^+ \\ \vec{A}_N^- \end{pmatrix}}_{\equiv |I\rangle}. \quad (46)$$

Матрицу рассеяния удобно получать из матрицы переноса, адекватно учитывая граничные условия. А именно, рассмотрим распространение волн вдоль оси x^3 на расстояние L . Амплитуды в точке x_0 и $x_0 + L$ связаны обыкновенным множителем распространения, однако для каждой волны фаза будет зависеть

от соответствующего собственного значения в уравнении (32).

$$\begin{bmatrix} \vec{A}_n^+(x_0^3 + L) \\ \vec{A}_n^-(x_0^3 + L) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \exp(i\Lambda_n^+ L) & 0 \\ 0 & \exp(i\Lambda_n^- L) \end{bmatrix}}_{\equiv \mathbb{P}_n(L)} \begin{bmatrix} \vec{A}_n^+(x_0^3) \\ \vec{A}_n^-(x_0^3) \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Учет граничных условий удобно проводить с помощью матрицы перехода между слоями:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathcal{E}_{\parallel n-1}^+ & \mathcal{E}_{\parallel n-1}^- \\ \mathcal{H}_{\parallel n-1}^+ & \mathcal{H}_{\parallel n-1}^- \end{pmatrix}}_{\equiv \mathcal{F}_{\parallel n-1}} \begin{pmatrix} \vec{A}_{n-1}^+ \\ \vec{A}_{n-1}^- \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathcal{E}_{\parallel n}^+ & \mathcal{E}_{\parallel n}^- \\ \mathcal{H}_{\parallel n}^+ & \mathcal{H}_{\parallel n}^- \end{pmatrix}}_{\equiv \mathcal{F}_{\parallel n}} \begin{pmatrix} \vec{A}_n^+ \\ \vec{A}_n^- \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Амплитуды слева и справа от границы будут связаны матрицей

$$\mathbb{T}_{n(n-1)} = \mathcal{F}_{\parallel n-1}^{-1} \mathcal{F}_{\parallel n}. \quad (49)$$

Полная матрица рассеяния будет являться продуктом специального последовательного перемножения полученной в предыдущем слое матрицы рассеяния с трансфер матрицей, отвечающей прохождению через слой или переходу через границу раздела двух сред:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_{N1} = \mathbb{T}_{N(N-1)} * \mathbb{P}_{N-1}(-L_{N-1}) * \mathbb{T}_{(N-1)(N-2)} * \dots \\ \dots * \mathbb{T}_{32} * \mathbb{P}_2(-L_2) * \mathbb{T}_{21} * \mathbb{S}_{11}. \end{aligned} \quad (50)$$

Операция умножения, представляет собой ни что иное, как

$$\mathbb{X} * \mathbb{Y} = \begin{pmatrix} -\mathbb{W}_{11}^{-1} \mathbb{Y}_{11} & -\mathbb{W}_{11}^{-1} \mathbb{W}_{12} \\ \mathbb{Y}_{21} - \mathbb{Y}_{22} \mathbb{X}_{21} \mathbb{W}_{11}^{-1} \mathbb{Y}_{11} & \mathbb{Y}_{22} \mathbb{X}_{22} - \mathbb{Y}_{22} \mathbb{X}_{21} \mathbb{W}_{11}^{-1} \mathbb{W}_{12} \end{pmatrix} \quad (51)$$

В подложке и верхнем слое, мы предполагаем, периодичности нет, более того, обычно это изотропные материалы без поглощения. Однако даже не накладывая таких ограничений, можно утверждать, что в полубесконечных пространствах подложки и верхнего слоя будут распространяться только те волны, собственные значения λ_n которых не имеют мнимой части. Такие моды будут распространяться в среде без затухания - именно их и можно зарегистрировать в дальнем поле. Естественно, что такие решения называются открытыми

каналами в дальнем поле. Как уже было выяснено ранее, в однородных средах волны будут иметь вид

$$E_{\alpha}^{(\beta, m, n, \pm)}(x^1, x^2, x^3) = e_{\alpha mn}^{\beta \pm} e^{iK_{1m}x^1 + iK_{2n}x^2 + iK_{3mn}^{\pm}x^3}. \quad (52)$$

Поскольку в большинстве экспериментов оптические спектры измеряются на расстояниях, много больших длины затухания эванесцентных полей, конечная матрица рассеяния является матрицей рассеяния в дальнем поле 4×4 . Именно ее компоненты далее будут именоваться параметрами рассеяния.

3. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ОТКЛИКА ПО ОПТИЧЕСКИМ СПЕКТРАМ

Для вывода общих уравнений, связывающих параметры рассеяния и коэффициенты эффективного отклика, рассмотрим плоско-параллельную пластину материала, характеризующегося уравнениями (1). Примем положительное направление оси координат z продольным нормали к поверхности материала от верхнего слоя к нижнему. Электромагнитное излучение падает на структуру вдоль оси z . Уравнения Максвелла для электромагнитной волны с временной зависимостью $\exp(-i\omega t)$ имеют вид:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = i\frac{\omega}{c}\vec{B}(\vec{r}), \quad \vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) = -i\frac{\omega}{c}\vec{D}(\vec{r}) \quad (53)$$

Выполним подстановку материальных уравнений (1) в (53) и выделим отдельно z и x, y компоненты:

$$\vec{\nabla}_s \times \vec{E}_z(\vec{r}) + \hat{z} \times \frac{\partial}{\partial z} \vec{E}_s(\vec{r}) = i\frac{\omega}{c}\mu_{ss}\vec{H}_s(\vec{r}) + i\frac{\omega}{c}\mu_{sz}\vec{H}_z(\vec{r}) + i\frac{\omega}{c}\zeta_{ss}\vec{E}_s(\vec{r}) + i\frac{\omega}{c}\zeta_{sz}\vec{E}_z(\vec{r})$$

$$\vec{\nabla}_s \times \vec{H}_s(\vec{r}) = -i\frac{\omega}{c}\varepsilon_{zs}\vec{E}_s(\vec{r}) - i\frac{\omega}{c}\varepsilon_{zz}\vec{E}_z(\vec{r}) - i\frac{\omega}{c}\xi_{zs}\vec{H}_s(\vec{r}) - i\frac{\omega}{c}\xi_{zz}\vec{H}_z(\vec{r}) \quad (54)$$

$$\vec{\nabla}_s \times \vec{H}_z(\vec{r}) + \hat{z} \times \frac{\partial}{\partial z} \vec{H}_s(\vec{r}) = -i\frac{\omega}{c}\varepsilon_{ss}\vec{E}_s(\vec{r}) - i\frac{\omega}{c}\varepsilon_{sz}\vec{E}_z(\vec{r}) - i\frac{\omega}{c}\xi_{ss}\vec{H}_s(\vec{r}) - i\frac{\omega}{c}\xi_{sz}\vec{H}_z(\vec{r})$$

$$\vec{\nabla}_s \times \vec{E}_s(\vec{r}) = i\frac{\omega}{c}\mu_{zs}\vec{H}_s(\vec{r}) + i\frac{\omega}{c}\mu_{zz}\vec{H}_z(\vec{r}) + i\frac{\omega}{c}\zeta_{zs}\vec{E}_s(\vec{r}) + i\frac{\omega}{c}\zeta_{zz}\vec{E}_z(\vec{r}) \quad (55)$$

Так как мы предполагаем материал однородным, решения будут являться плоскими волнами в направлениях x и y , поэтому можно $\vec{\nabla}_s$ заменить на $i\vec{k}_s$. Из полученных уравнений (54), (55) выразим z -компоненты полей E и H :

$$\vec{E}_z(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_{zz}\mu_{zz} - \xi_{zz}\zeta_{zz}} \left(-\varepsilon_{zs}\mu_{zz} - \frac{\xi_{zz}c}{\omega}\vec{k}_s \times + \zeta_{zs}\xi_{zz} \right) \vec{E}_s(\vec{r}) + \frac{1}{\varepsilon_{zz}\mu_{zz} - \xi_{zz}\zeta_{zz}} \left(-\xi_{zs}\mu_{zz} - \frac{\mu_{zz}c}{\omega}\vec{k}_s \times + \mu_{zs}\zeta_{zz} \right) \vec{H}_s(\vec{r}) \quad (56)$$

$$\vec{H}_z(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_{zz}\mu_{zz} - \xi_{zz}\zeta_{zz}} \left(-\varepsilon_{zz}\zeta_{zs} + \frac{\varepsilon_{zz}c}{\omega}\vec{k}_s \times + \zeta_{zz}\varepsilon_{zs} \right) \vec{E}_s(\vec{r}) + \frac{1}{\varepsilon_{zz}\mu_{zz} - \xi_{zz}\zeta_{zz}} \left(-\mu_{zs}\varepsilon_{zz} + \frac{\zeta_{zz}c}{\omega}\vec{k}_s \times + \xi_{zs}\zeta_{zz} \right) \vec{H}_s(\vec{r}) \quad (57)$$

Получим окончательные уравнения, описывающие распространение волн в средах. Для этого (56), (57) подставим в (54), (55) и векторно домножим полученное на \vec{z} слева, воспользовавшись результатами из [36].

$$\begin{aligned}
\partial_z E_s = & \frac{1}{D} \left[-\frac{i\xi_{zz}}{\omega} \hat{z} \times I_3 \cdot \vec{k}_s \times I_3 \cdot \vec{k}_s \times I_3 + i\xi_{zz} \hat{z} \times I_3 \cdot \vec{k}_s \times I_3 \cdot \zeta_{zs} - \right. \\
& - i\mu_{zz} \hat{z} \times I_3 \cdot \vec{k}_s \times I_3 \cdot \varepsilon_{zs} - i\omega D \hat{z} \times I_3 \cdot \zeta_{ss} - i\varepsilon_{zz} \hat{z} \times I_3 \cdot \mu_{sz} \cdot \vec{k}_s \times I_3 + \\
& + i\omega \varepsilon_{zz} \hat{z} \times I_3 \cdot \mu_{sz} \cdot \zeta_{zs} - i\omega \zeta_{zz} \hat{z} \times I_3 \cdot \mu_{sz} \cdot \varepsilon_{zs} + \\
& \left. + i\xi_{zz} \hat{z} \times I_3 \cdot \zeta_{sz} \cdot \vec{k}_s \times I_3 - i\omega \xi_{zz} \hat{z} \times I_3 \cdot \zeta_{sz} \cdot \zeta_{zs} + i\omega \mu_{zz} \hat{z} \times I_3 \cdot \varepsilon_{sz} \cdot \varepsilon_{zs} \right] E_s \\
& + \frac{1}{D} \left[i\xi_{zz} \hat{z} \times I_3 \cdot \vec{k}_s \times I_3 \cdot \mu_{zs} - \frac{i\mu_{zz}}{\omega} \hat{z} \times I_3 \cdot \vec{k}_s \times I_3 \cdot \vec{k}_s \times I_3 - \right. \\
& - i\mu_{zz} \hat{z} \times I_3 \cdot \vec{k}_s \times I_3 \cdot \xi_{zs} - i\omega D \hat{z} \times I_3 \cdot \mu_{ss} + i\omega \varepsilon_{zz} \hat{z} \times I_3 \cdot \mu_{sz} \cdot \mu_{zs} - \\
& - i\zeta_{zz} \hat{z} \times I_3 \cdot \mu_{sz} \cdot \vec{k}_s \times I_3 - i\omega \zeta_{zz} \hat{z} \times I_3 \cdot \mu_{sz} \cdot \xi_{zs} - \\
& \left. - i\omega \xi_{zz} \hat{z} \times I_3 \cdot \zeta_{sz} \cdot \mu_{zs} + i\mu_{zz} \hat{z} \times I_3 \cdot \zeta_{sz} \cdot \vec{k}_s \times I_3 + i\omega \mu_{zz} \hat{z} \times I_3 \cdot \zeta_{sz} \cdot \xi_{zs} \right] H_s,
\end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned}
\partial_z H_s = & \frac{1}{D} \left[\frac{i\varepsilon_{zz}}{\omega} \hat{z} \times I_3 \cdot \vec{k}_s \times I_3 \cdot \vec{k}_s \times I_3 - i\varepsilon_{zz} \hat{z} \times I_3 \cdot \vec{k}_s \times I_3 \cdot \zeta_{zs} + \right. \\
& + i\zeta_{zz} \hat{z} \times I_3 \cdot \vec{k}_s \times I_3 \cdot \varepsilon_{zs} + i\omega D \hat{z} \times I_3 \cdot \varepsilon_{ss} - i\xi_{zz} \hat{z} \times I_3 \cdot \varepsilon_{sz} \cdot \vec{k}_s \times I_3 + \\
& + i\omega \xi_{zz} \hat{z} \times I_3 \cdot \varepsilon_{sz} \cdot \zeta_{zs} - i\omega \mu_{zz} \hat{z} \times I_3 \cdot \varepsilon_{sz} \cdot \varepsilon_{zs} + \\
& \left. + i\varepsilon_{zz} \hat{z} \times I_3 \cdot \xi_{sz} \cdot \vec{k}_s \times I_3 - i\omega \varepsilon_{zz} \hat{z} \times I_3 \cdot \xi_{sz} \cdot \zeta_{zs} + i\omega \zeta_{zz} \hat{z} \times I_3 \cdot \xi_{sz} \cdot \varepsilon_{zs} \right] E_s \\
& + \frac{1}{D} \left[-i\varepsilon_{zz} \hat{z} \times I_3 \cdot \vec{k}_s \times I_3 \cdot \mu_{zs} + \frac{i\zeta_{zz}}{\omega} \hat{z} \times I_3 \cdot \vec{k}_s \times I_3 \cdot \vec{k}_s \times I_3 + \right. \\
& + i\zeta_{zz} \hat{z} \times I_3 \cdot \vec{k}_s \times I_3 \cdot \xi_{zs} + i\omega D \hat{z} \times I_3 \cdot \xi_{ss} + i\omega \xi_{zz} \hat{z} \times I_3 \cdot \varepsilon_{sz} \cdot \mu_{zs} - \\
& - i\mu_{zz} \hat{z} \times I_3 \cdot \varepsilon_{sz} \cdot \vec{k}_s \times I_3 - i\omega \mu_{zz} \hat{z} \times I_3 \cdot \varepsilon_{sz} \cdot \xi_{zs} - \\
& \left. - i\omega \varepsilon_{zz} \hat{z} \times I_3 \cdot \xi_{sz} \cdot \mu_{zs} + i\zeta_{zz} \hat{z} \times I_3 \cdot \xi_{sz} \cdot \vec{k}_s \times I_3 + i\omega \zeta_{zz} \hat{z} \times I_3 \cdot \xi_{sz} \cdot \xi_{zs} \right] H_s.
\end{aligned} \tag{59}$$

Поскольку нас интересует случай падения под прямым углом, исключим \vec{k}_s :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} \vec{E}_s(\vec{r}) = & \frac{1}{\varepsilon_{zz}\mu_{zz} - \xi_{zz}\zeta_{zz}} (-i\omega(\varepsilon_{zz}\mu_{zz} - \xi_{zz}\zeta_{zz})\hat{z} \times I_3\zeta_{ss} + \\
& i\omega\varepsilon_{zz}\hat{z} \times I_3\mu_{sz}\zeta_{zs} - i\omega\zeta_{zz}\hat{z} \times I_3\mu_{sz}\varepsilon_{zs} - \\
& i\omega\xi_{zz}\hat{z} \times I_3\zeta_{sz}\zeta_{zs} + i\omega\mu_{zz}\hat{z} \times I_3\zeta_{sz}\varepsilon_{zs}) \vec{E}_s(\vec{r}) + \\
& \frac{1}{\varepsilon_{zz}\mu_{zz} - \xi_{zz}\zeta_{zz}} (-i\omega(\varepsilon_{zz}\mu_{zz} - \xi_{zz}\zeta_{zz})\hat{z} \times I_3\mu_{ss} + \\
& i\omega\varepsilon_{zz}\hat{z} \times I_3\mu_{sz}\mu_{zs} - i\omega\zeta_{zz}\hat{z} \times I_3\mu_{sz}\xi_{zs} - \\
& i\omega\xi_{zz}\hat{z} \times I_3\zeta_{sz}\mu_{zs} + i\omega\mu_{zz}\hat{z} \times I_3\zeta_{sz}\xi_{zs}) \vec{H}_s(\vec{r}).
\end{aligned} \tag{60}$$

Аналогичное выражение для $\frac{\partial}{\partial z} \vec{H}_s(\vec{r})$ выглядит как:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} \vec{H}_s(\vec{r}) = & \frac{1}{\varepsilon_{zz}\mu_{zz} - \xi_{zz}\zeta_{zz}} (i\omega(\varepsilon_{zz}\mu_{zz} - \xi_{zz}\zeta_{zz})\hat{z} \times I_3\varepsilon_{ss} + \\
& i\omega\xi_{zz}\hat{z} \times I_3\varepsilon_{sz}\zeta_{zs} - i\omega\mu_{zz}\hat{z} \times I_3\varepsilon_{sz}\varepsilon_{zs} - \\
& i\omega\varepsilon_{zz}\hat{z} \times I_3\xi_{sz}\zeta_{zs} + i\omega\zeta_{zz}\hat{z} \times I_3\xi_{sz}\varepsilon_{zs}) \vec{E}_s(\vec{r}) + \\
& \frac{1}{\varepsilon_{zz}\mu_{zz} - \xi_{zz}\zeta_{zz}} (i\omega(\varepsilon_{zz}\mu_{zz} - \xi_{zz}\zeta_{zz})\hat{z} \times I_3\xi_{ss} + \\
& i\omega\xi_{zz}\hat{z} \times I_3\varepsilon_{sz}\mu_{zs} - i\omega\mu_{zz}\hat{z} \times I_3\varepsilon_{sz}\xi_{zs} - \\
& i\omega\varepsilon_{zz}\hat{z} \times I_3\xi_{sz}\mu_{zs} + i\omega\zeta_{zz}\hat{z} \times I_3\xi_{sz}\xi_{zs}) \vec{H}_s(\vec{r}).
\end{aligned} \tag{61}$$

Здесь принято обозначение

$$\hat{z} \times I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что компоненты, имеющие индексы sz и zs, равны нулю. В этом случае получим систему дифференциальных уравнений, соответствующую материальным уравнениям в форме (2):

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ H_x \\ H_y \end{pmatrix} = -i\frac{\omega}{c} \begin{pmatrix} i\beta_x & -i\chi_y & -\mu_{yx} & -\mu_{yy} \\ -i\chi_x & i\beta_y & \mu_{xx} & \mu_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & -i\beta_y & -i\chi_y \\ -\varepsilon_{xx} & -\varepsilon_{xy} & -i\chi_x & -i\beta_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ H_x \\ H_y \end{pmatrix} \tag{62}$$

Для дальнейшего удобства приняты следующие равенства:

$$\begin{aligned}\zeta_{yx} = -\xi_{xy} = -i\beta_x, & \quad \zeta_{xx} = -\xi_{yy} = -i\chi_x, \\ \zeta_{xy} = -\xi_{yx} = i\beta_y, & \quad \zeta_{yy} = -\xi_{xx} = i\chi_y.\end{aligned}$$

Теперь видно, что бианизотропия обеспечивает связь разных компонент электрического и магнитного поля, а киральность - одинаковых. Именно киральность отвечает за конверсию поляризаций. Это легко подтверждается следующими соображениями: если убрать киральность из уравнений, матрица системы дифференциальных уравнений станет блочной, то есть распространяющиеся в среде волны будут обладать невзаимодействующими поляризациями.

Пронумеруем слои вещества, так что 1 - верхний слой, 2 - метаматериал, 3- подложка. Верхний и нижний слой считаются изотропными немагнитными диэлектриками $\mu_{1,3} = 1$, а $\varepsilon_1, \varepsilon_3$ - известные скалярные величины. Обозначим α_n матрицу, состоящую из собственных векторов матрицы системы дифференциальных уравнений в среде с номером n , и β_n - диагональную матрицу соответствующих собственных значений. При этом 1 и 2 собственные вектора соответствуют распространяющимся против оси z волнам, а 3 и 4 - распространяющимся вдоль оси z . Толщину слоя неизвестного материала обозначим d , а амплитуды налетающих волн назовем A_3 и A_4 для падения волны сверху и A_1, A_2 для падения снизу. Учитывая, что уравнения Максвелла в среде при отсутствии токов и свободных зарядов требуют непрерывности тангенциальных компонент поля, можно записать следующие уравнения, связывающие коэффициенты прохождения и отражения с решениями системы дифференциальных уравнений:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} R_{13} & R_{14} \\ R_{23} & R_{24} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = \alpha_2 \exp^{\beta_2 d} \alpha_2^{-1} \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ T_{33} & T_{34} \\ T_{43} & T_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_3 \\ A_4 \end{pmatrix}. \quad (63)$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \alpha_2 \exp^{\beta_2 d} \alpha_2^{-1} \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ r_{31} & r_{32} \\ r_{41} & r_{42} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}. \quad (64)$$

Между такими коэффициентами прохождения и элементами матрицы рассеяния, используемой нашей группой, есть следующее соответствие:

$$\begin{pmatrix} r_{ss}^{aa} & r_{sp}^{aa} & t_{ss}^{ab} & t_{sp}^{ab} \\ r_{ps}^{aa} & r_{pp}^{aa} & t_{ps}^{ab} & t_{pp}^{ab} \\ t_{ss}^{ba} & t_{sp}^{ba} & r_{ss}^{bb} & r_{sp}^{bb} \\ t_{ps}^{ba} & t_{pp}^{ba} & r_{ps}^{bb} & r_{pp}^{bb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{13} & R_{14} & t_{11} & t_{12} \\ R_{23} & R_{24} & t_{21} & t_{22} \\ T_{33} & T_{34} & r_{31} & r_{32} \\ T_{43} & T_{44} & r_{41} & r_{42} \end{pmatrix} \quad (65)$$

Материал типа «двойная рыболовная сеть» обладает осью симметрии 4 порядка, совпадающей с нормалью к поверхности, и не имеет киральных компонент отклика. Поэтому для него $\chi = 0$ и в главных осях, совпадающих с направлениями периодичности решетки, $\beta_x = \beta_y$, $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = 0$, $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{xx} = \varepsilon$, $\mu_{xy} = \mu_{yx} = 0$, $\mu_{xx} = \mu_{yy} = \mu$. Таким образом,

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i(\beta + \sqrt{\beta^2 - \varepsilon\mu})}{\varepsilon} & 0 & \frac{i(\sqrt{\beta^2 - \varepsilon\mu} - \beta)}{\varepsilon} \\ \frac{i(\beta + \sqrt{\beta^2 - \varepsilon\mu})}{\varepsilon} & 0 & -\frac{i(\sqrt{\beta^2 - \varepsilon\mu} - \beta)}{\varepsilon} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (66)$$

$$\beta_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\beta^2 - \varepsilon\mu\omega}}{c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{\beta^2 - \varepsilon\mu\omega}}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{\beta^2 - \varepsilon\mu\omega}}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{\beta^2 - \varepsilon\mu\omega}}{c} \end{pmatrix}, \quad (67)$$

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_3}} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно получить аналитические выражения для коэффициентов прохождения и отражения, которые для различных поляризацій совпадают вследствие симметрии вращения 4 порядка вокруг нормали к поверхности слоя:

$$R = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} (i\beta \sin(\phi) - in \cos(\phi) - \mu\sqrt{\varepsilon_3} \sin(\phi)) + i\sqrt{\varepsilon_3}(\beta \sin(\phi) + n \cos(\phi)) + \varepsilon \sin(\phi)}{\sqrt{\varepsilon_1} (\mu\sqrt{\varepsilon_3} \sin(\phi) + i(n \cos(\phi) - \beta \sin(\phi))) + i\sqrt{\varepsilon_3}(\beta \sin(\phi) + n \cos(\phi)) + \varepsilon \sin(\phi)}, \quad (68)$$

$$T = \frac{2n\sqrt{\varepsilon_3}}{\sqrt{\varepsilon_1} (-\beta \sin(\phi) + n \cos(\phi) - i\mu\sqrt{\varepsilon_3} \sin(\phi)) + \sqrt{\varepsilon_3}(\beta \sin(\phi) + n \cos(\phi)) - i\varepsilon \sin(\phi)}$$

$$r = \frac{i\sqrt{\varepsilon_1} (-\beta \sin(\phi) + n \cos(\phi) + i\mu\sqrt{\varepsilon_3} \sin(\phi)) - i\sqrt{\varepsilon_3}(\beta \sin(\phi) + n \cos(\phi)) + \varepsilon \sin(\phi)}{\sqrt{\varepsilon_1} (\mu\sqrt{\varepsilon_3} \sin(\phi) + i(n \cos(\phi) - \beta \sin(\phi))) + i\sqrt{\varepsilon_3}(\beta \sin(\phi) + n \cos(\phi)) + \varepsilon \sin(\phi)}, \quad (69)$$

$$t = \frac{2n\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1} (-\beta \sin(\phi) + n \cos(\phi) - i\mu\sqrt{\varepsilon_3} \sin(\phi)) + \sqrt{\varepsilon_3}(\beta \sin(\phi) + n \cos(\phi)) - i\varepsilon \sin(\phi)}$$

Здесь введены обозначения: $n = \sqrt{\varepsilon\mu - \beta^2}$ и $d\frac{\omega}{c}n = \phi$. Разрешая эти уравнения с известными параметрами рассеяния (численное моделирование методом гармоник Фурье в программном пакете MATLAB) относительно β , ε и μ , получим зависимости, отображенные на Рис. 10, в случае $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_3 = 2, 32$. Данные о частотной зависимости диэлектрической проницаемости золота взяты из работы [37].

Для проверки воспроизводимости исходных параметров рассеяния, вычислим их с учетом полученных локальных восприимчивостей. Результаты представлены графиками на Рис. 11.

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы. Для случая симметричных обкладок вне зависимости от их диэлектрических проницаемостей отклик материала не имеет ни киральных, ни бианизотропных компонент (Рис. 12). Это связано с наличием дополнительных плоскостей симметрии: помимо того, что в любом окружении имеются вертикальные плоскости симметрии, препятствующие образованию киральности, в случае симметричных обкладок возникает горизонтальная плоскость симметрии, в результате чего пропадает и бианизотропия.

Заметим, что в случае несимметричного диэлектрического окружения можно обнаружить отличную от нуля бианизотропию. В районе 570 мЭВ наблюдается резонансное поведение коэффициентов матрицы материальных уравнений, причем диэлектрическая проницаемость имеет участок с отрицательной мнимой частью, что, тем не менее, не делает среду усиливающей.

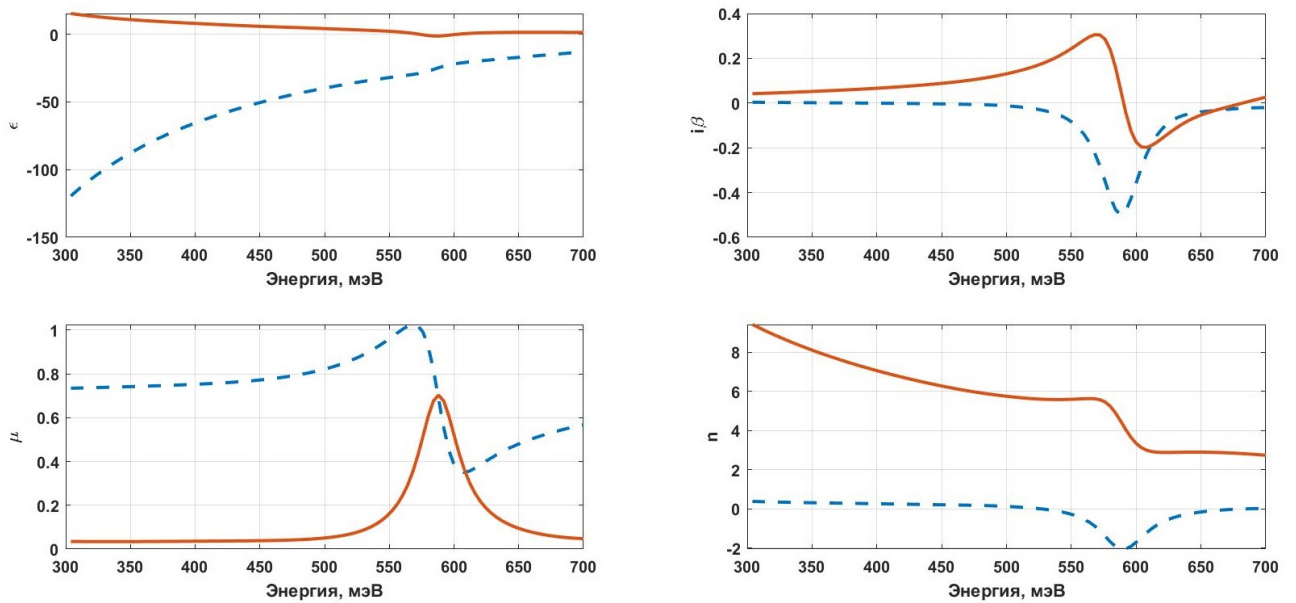


Рисунок 10 – Электромагнитный отклик метаматериала «двойная рыболовная сеть» в несимметричных диэлектрических обкладках. ε - диэлектрическая проницаемость, μ - магнитная проницаемость, β - бианизотропия, χ - киральность, n - показатель преломления в среде. Действительные части изображены пунктиром, мнимые - сплошной линией. Киральность отсутствует вследствие неразличимости фигуры со своим зеркальным отражением в вертикальных плоскостях, образованных нормалью к поверхности и направляющими векторами решетки метаматериала.

Наоборот, как видно из Рис. 13, в области резонанса поглощение усиливается. Это наблюдение показывает, что не стоит считать, что отрицательная мнимая часть диэлектрической проницаемости обязательно приводит к нарушению физических законов, как это было предложено авторами [13]. В случае наличия киральности матрица системы дифференциальных уравнения не разбивается на блоки, происходит конверсия поляризаций, нахождение решения сильно усложняется. Кроме того, появляются волны, соответствующие собственным векторам матрицы, испытывающие разные показатели преломления. Наиболее неожиданный эффект - отсутствие изменения поляризации в отраженных волнах при наличии конверсии в спектре прохождения. Это объясняется деструктивной интерференцией волн, отраженных от двух поверхностей плоского слоя метаматериала.

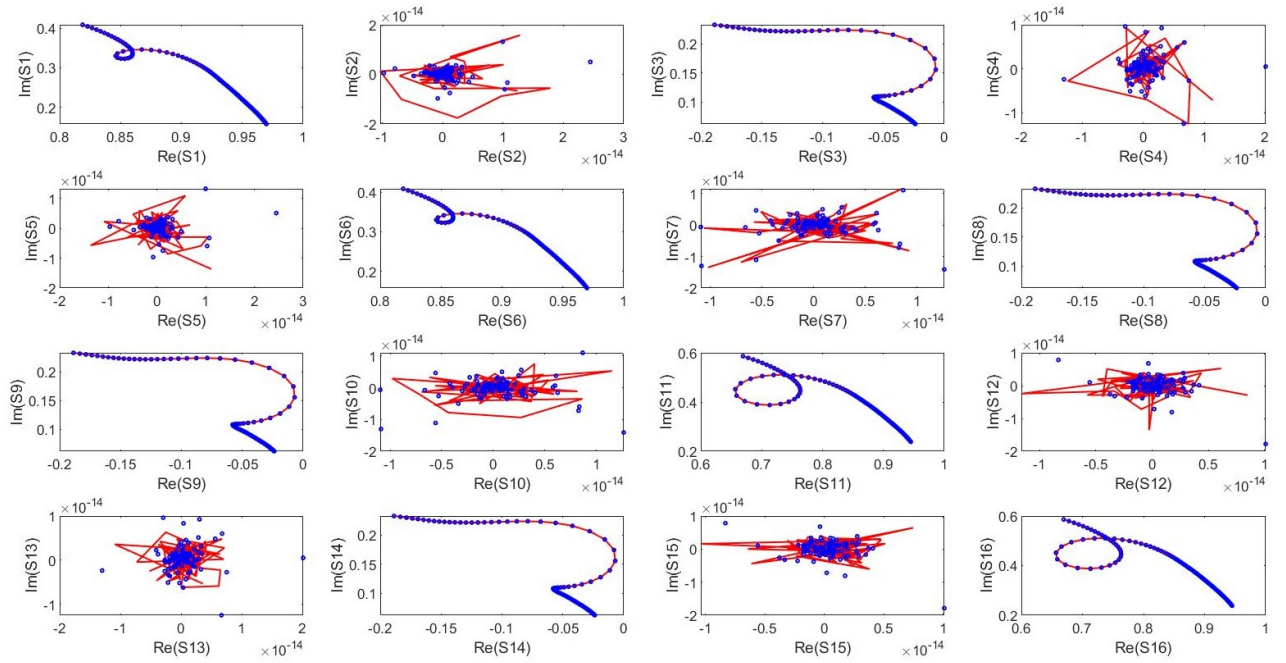


Рисунок 11 – Графики значений коэффициентов S-матрицы метаматериала «двойная рыболовная сеть» в несимметричных диэлектрических обкладках, полученных с помощью метода мод Фурье (данные отображены точками) и рассчитанных по формуле (63) и (64) с восстановленными значениями локальных восприимчивостей, отображенных на Рис. 10 (данные отображены линиями).

Также была отдельно исследована масштабируемость эффекта. Было проведено аналогичное моделирование, причем отношения всех пространственных размеров ячейки метаматериала последовательно повышались относительно изначальных в 1.1, 1.2, 1.3 и 1.4 раз соответственно. Результаты приведены на графиках Рис. 14. Как видно, при увеличении размеров ячейки резонанс переходит в область больших длин волн, т.е. меньших энергий.

В случае наличия и киральности, и бианизотропии при сохранении по крайней мере симметрии C_4 , матрица из дифференциального уравнения (62) имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\beta\omega}{c} & \frac{\chi\omega}{c} & 0 & \frac{i\mu\omega}{c} \\ -\frac{\chi\omega}{c} & \frac{\beta\omega}{c} & -\frac{i\mu\omega}{c} & 0 \\ 0 & -\frac{i\varepsilon\omega}{c} & -\frac{\beta\omega}{c} & \frac{\chi\omega}{c} \\ \frac{i\varepsilon\omega}{c} & 0 & -\frac{\chi\omega}{c} & -\frac{\beta\omega}{c} \end{pmatrix}, \quad (70)$$

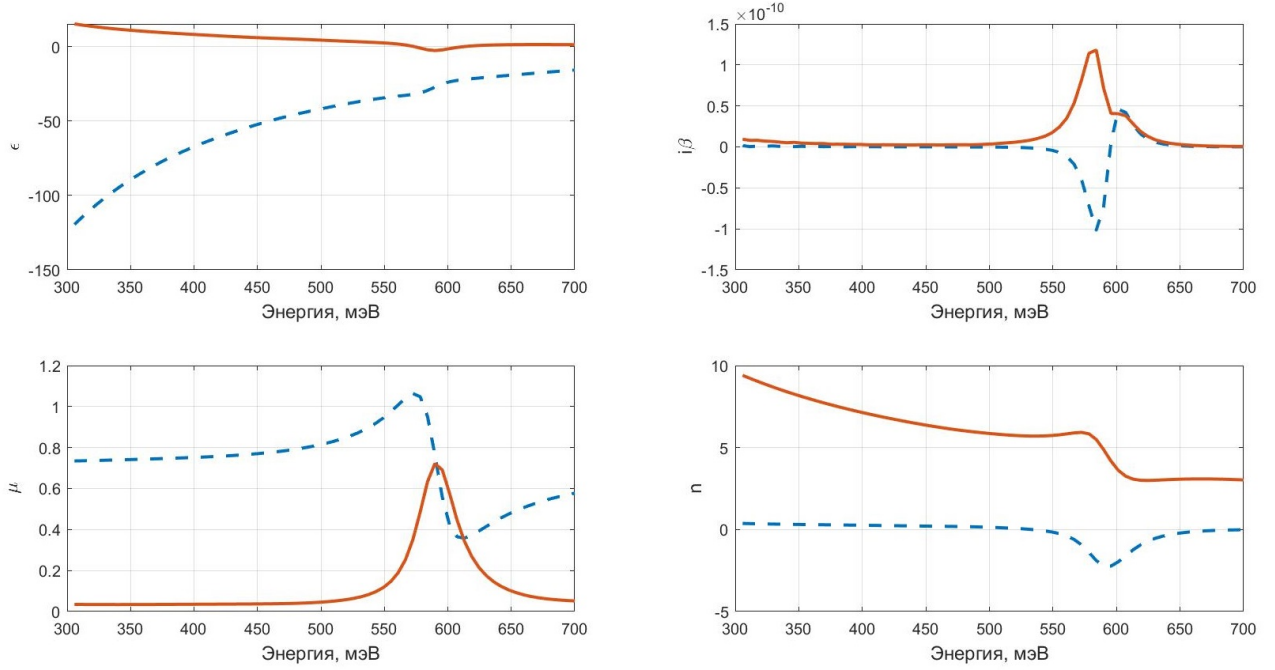


Рисунок 12 – Электромагнитный отклик метаматериала «двойная рыболовная сеть» в симметричных диэлектрических обкладках воздух-воздух. ε - диэлектрическая проницаемость, μ - магнитная проницаемость, β - бианизотропия, χ - киральность, n - показатель преломления в среде. Действительные части изображены пунктиром, мнимые - сплошной линией. Киральности и бианизотропии не наблюдается вследствие высокой симметрии.

а матрицы из ее собственных значений и собственных векторов

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} \frac{n-i\beta}{\varepsilon} & -\frac{n+i\beta}{\varepsilon} & \frac{n-i\beta}{\varepsilon} & -\frac{n+i\beta}{\varepsilon} \\ -\frac{in+\beta}{\varepsilon} & \frac{\beta-in}{\varepsilon} & \frac{in+\beta}{\varepsilon} & \frac{in-\beta}{\varepsilon} \\ i & -i & -i & i \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} \frac{i(n-\chi)\omega}{c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{i(n-\chi)\omega}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i(n+\chi)\omega}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{i(n+\chi)\omega}{c} \end{pmatrix}.$$

Параметры рассеяния имеют следующий вид:

$$R_{13} = R_{24} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} ((-i)C2n + i\beta S2 - \mu S2\sqrt{\varepsilon_3}) + i\sqrt{\varepsilon_3}(C2n + \beta S2) + S2\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon_1} (\mu S2\sqrt{\varepsilon_3} + i(C2n - \beta S2)) + i\sqrt{\varepsilon_3}(C2n + \beta S2) + S2\varepsilon},$$

$$R_{14} = R_{23} = 0, \quad (71)$$

$$T_{33} = T_{44} = \frac{2C1n\sqrt{\varepsilon_3}}{(\sqrt{\varepsilon_1} (C2n - \beta S2 - i\mu S2\sqrt{\varepsilon_3}) + \sqrt{\varepsilon_3}(C2n + \beta S2) - iS2\varepsilon)}, \quad (72)$$

$$T_{34} = -T_{43} = \frac{-2nS1\sqrt{\varepsilon_3}}{(\sqrt{\varepsilon_1} (C2n - \beta S2 - i\mu S2\sqrt{\varepsilon_3}) + \sqrt{\varepsilon_3}(C2n + \beta S2) - iS2\varepsilon)},$$

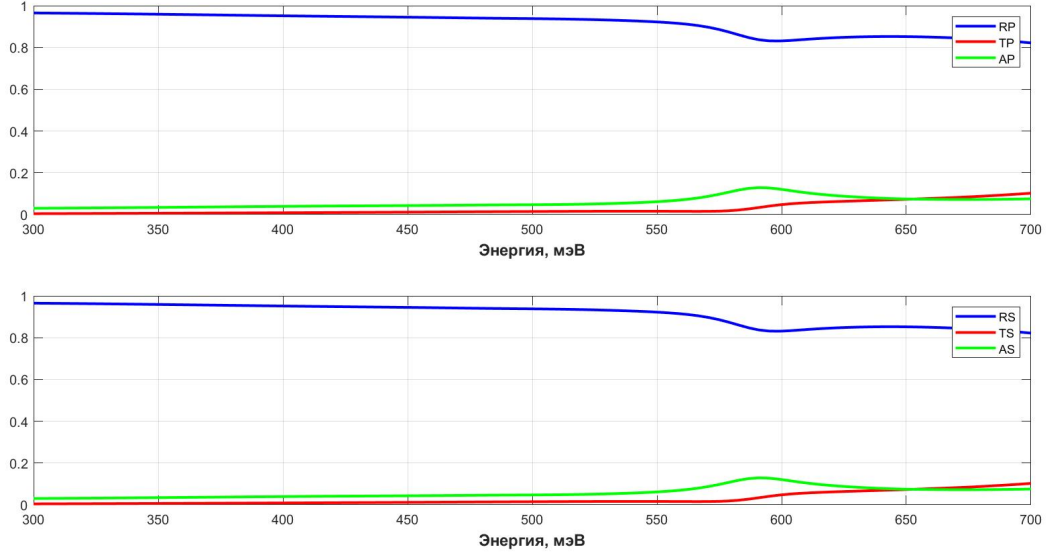


Рисунок 13 – Графики спектров пропускания и отражения метаматериала «двойная рыболовная сеть» в несимметричных диэлектрических обкладках. На цветовой легенде введены обозначения из двух букв: первая S/P - поляризации, вторая T/R/A - прохождение, отражение и поглощение.

$$r_{31} = r_{42} = \frac{i\sqrt{\varepsilon_1}(C2n - \beta S2 + i\mu S2\sqrt{\varepsilon_3}) - i\sqrt{\varepsilon_3}(C2n + \beta S2) + S2\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon_1}(\mu S2\sqrt{\varepsilon_3} + i(C2n - \beta S2)) + i\sqrt{\varepsilon_3}(C2n + \beta S2) + S2\varepsilon},$$

$$r_{32} = r_{41} = 0, \quad (73)$$

$$t_{11} = t_{22} = \frac{2nC1\sqrt{\varepsilon_1}}{(\sqrt{\varepsilon_1}(C2n - \beta S2 - i\mu S2\sqrt{\varepsilon_3}) + \sqrt{\varepsilon_3}(C2n + \beta S2) - iS2\varepsilon)}, \quad (74)$$

$$t_{21} = -t_{12} = \frac{-2nS1\sqrt{\varepsilon_1}}{(\sqrt{\varepsilon_1}(C2n - \beta S2 - i\mu S2\sqrt{\varepsilon_3}) + \sqrt{\varepsilon_3}(C2n + \beta S2) - iS2\varepsilon)}.$$

Полученные равенства следует рассматривать, учитывая следующие обозначения:

$$n^2 = \mu\varepsilon - \beta^2, \quad \sin\left(\frac{d\chi\omega}{c}\right) = S1, \quad \cos\left(\frac{d\chi\omega}{c}\right) = C1, \quad (75)$$

$$\cos\left(\frac{dn\omega}{c}\right) = C2, \quad \sin\left(\frac{dn\omega}{c}\right) = S2.$$

К сожалению, метаматериал, состоящий из двух щелевых резонаторов, такой симметрией не обладает, поэтому необходимо восстановить все 10 независимых локальных восприимчивостей, их частотная зависимость приведена

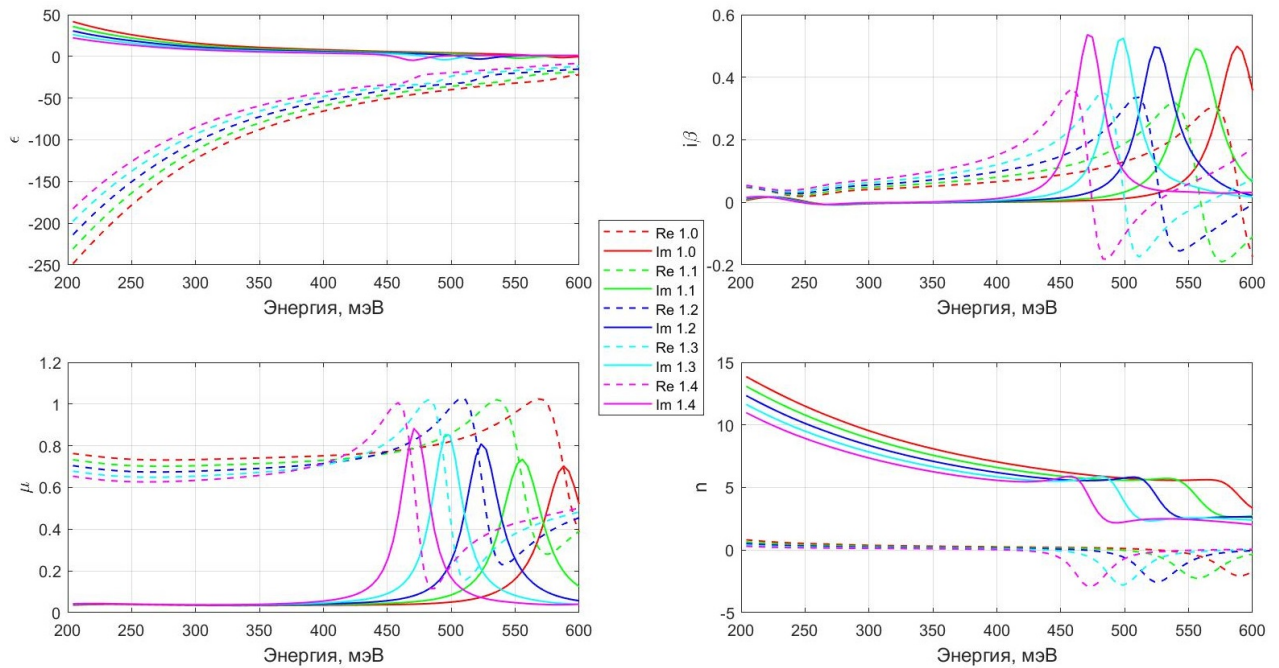


Рисунок 14 – Зависимости от частоты параметров локального отклика метаматериала «двойная рыболовная сеть» с различным масштабирующим множителем. Кривые отображают характеристики материала в соответствии с цветовой легендой Re и Im - действительна и мнимая части параметра, числа 1.0-1.4 непосредственно обозначают количество раз, в которое была пропорционально увеличена в размерах элементарная ячейка материала.

на Рис. 15. Для полноты картины стоит также привести зависимости коэффициентов пропускания и отражения от частоты (Рис. 16). Численный расчет отклика проводился с помощью многомерного метода Ньютона, который описан, например, в [38].

Из полученных данных численного эксперимента можно сделать вывод, что в среде распространяются две волны двух разных поляризаций, причем они испытывают разный показатель преломления. Хотя отрицательных значений показателей преломления не наблюдается, они имеют резонансное поведение вблизи 550 мэВ и 610 мэВ. Заметим, что часть локальных восприимчивостей имеет схожее поведение: $\epsilon_{xy}, \mu_{xy}, \chi_x, \chi_y$ резонансно ведут себя на обеих частотах; $\epsilon_{xx}, \mu_{yy}, \beta_x$ - только вблизи 550 мэВ; $\epsilon_{yy}, \mu_{xx}, \beta_y$ - только вблизи 610 мэВ. Это наблюдение полностью согласовано с тем фактом, что киральность отвечает за конверсию поляризаций.

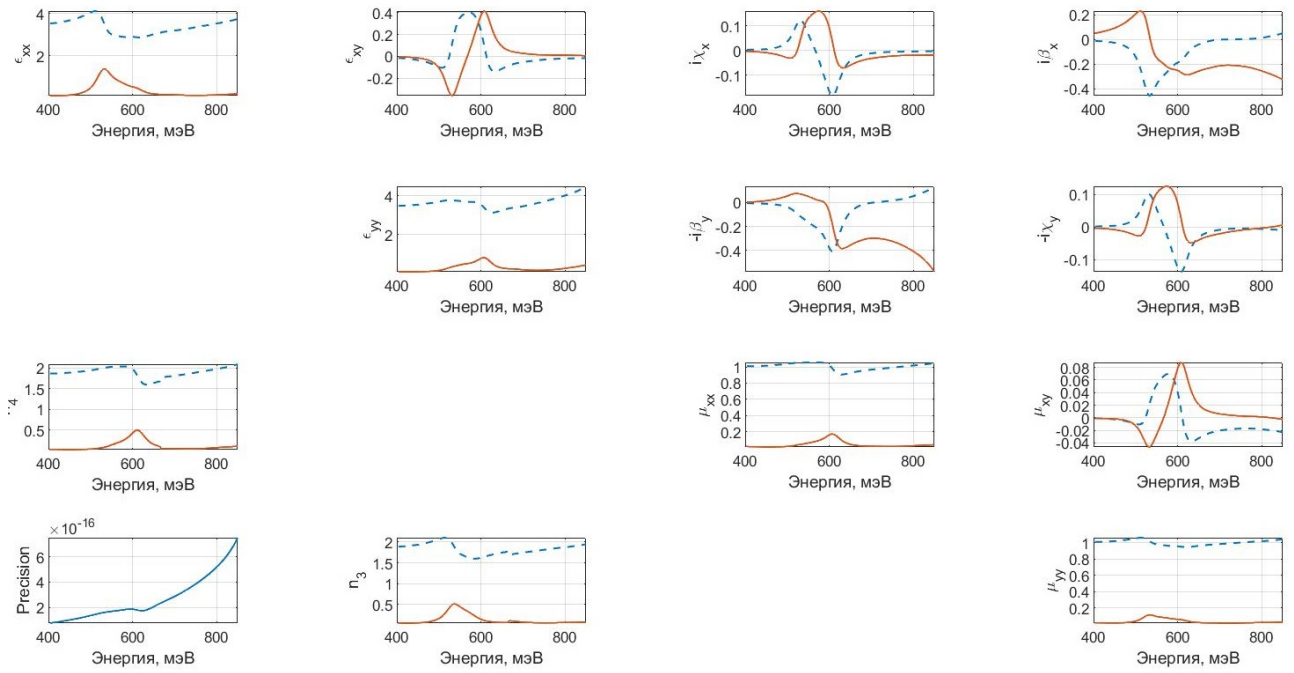


Рисунок 15 – Электромагнитный отклик метаматериала с ячейкой из 2 повернутых щелевых резонаторов в несимметричных диэлектрических обкладках. ϵ - диэлектрическая проницаемость, μ - магнитная проницаемость, β - бианизотропия, χ - киральность, $n_{3,4}$ - показатели преломления в среде. Действительные части изображены пунктиром, мнимые - сплошной линией.

Для проверки точности восстановления были проведены сравнения результатов, полученных на основании формул (63), (64) с восстановленными локальными восприимчивостями, с расчетом по методу гармоник Фурье. Они отражены на графиках Рис. 17.

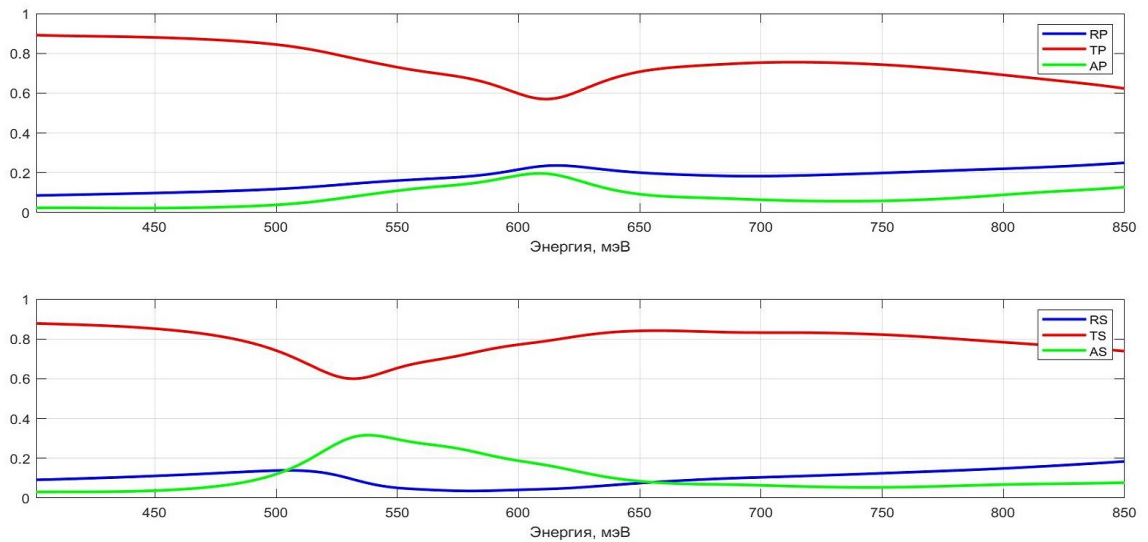


Рисунок 16 – Графики спектров пропускания и отражения метаматериала с ячейкой из 2 щелевых резонаторов в несимметричных диэлектрических обкладках. На цветовой легенде введены обозначения из двух букв: первая S/P - поляризации, вторая T/R/A - прохождение, отражение и поглощение.

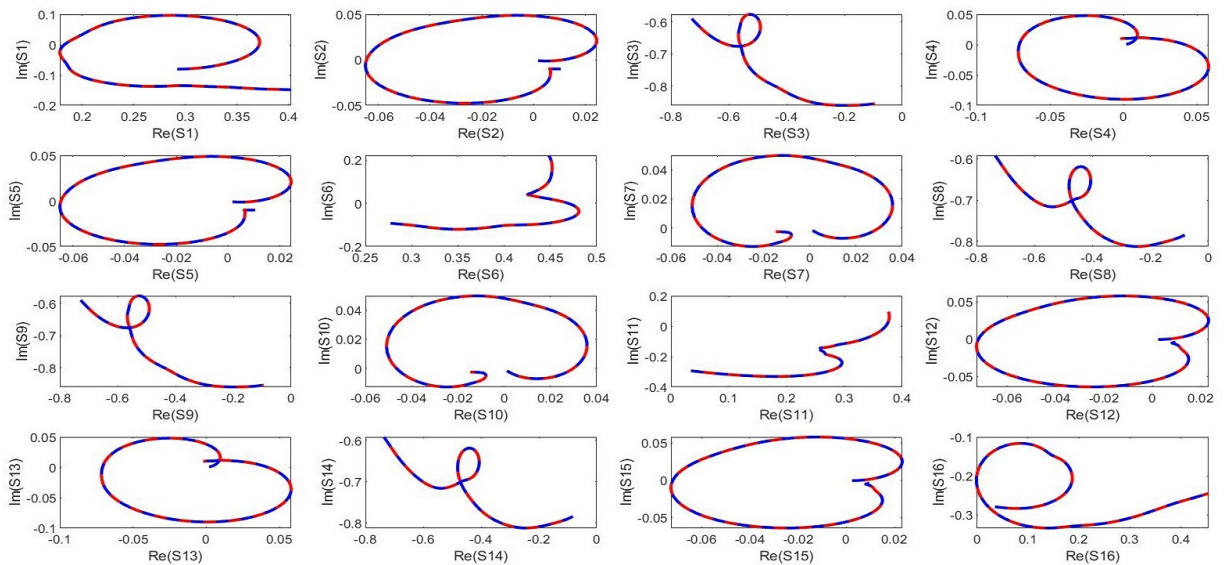


Рисунок 17 – Графики элементов матрицы рассеяния метаматериала, элементарная ячейка которого состоит из двух металлических щелевых резонаторов в толще диэлектрика. Синие непрерывные линии – элементы матриц рассеяния, полученных с помощью метода гармоник Фурье, красные пунктирные линии – элементы матриц рассеяния, вычисленных на основании формул (63), (64) с подставленными восстановленными параметрами эффективного электромагнитного отклика с Рис. 15. Результаты совпадают с высокой точностью (оценка "Precision" на графике Рис. 15 порядка 10^{-16}), что, несомненно, является преимуществом такого описания.

ВЫВОДЫ

1. Для смешения поляризаций волн необходимо, чтобы система обладала киральностью (не имела плоскостей зеркальной симметрии). Без этого условия уравнения распространения волн в главных осях распадаются на две независимые системы. Эффект конверсии поляризаций стоит изучить в дальнейшем, поскольку существует потребность в создании фильтров циркулярной поляризации. В этом отношении использование в конструкции щелевых резонаторов оказывается перспективной идеей: для таких метаматериалов разные собственные векторы матрицы распространения соответствуют различным собственным значениям, что обеспечивает распространение волн в среде с разной фазовой скоростью в зависимости от поляризации.

2. Сравнение восстановленного электромагнитного отклика для одной и той же структуры в различных диэлектрических обкладках показывает, что отсутствие горизонтальной плоскости зеркальной симметрии приводит к возникновению бианизотропии, причем во внимание необходимо принимать не только структуру элементарной ячейки метаматериала, но и вещества, граничащие со слоем метаматериала. Эта нелокальность, очевидно, будет существенно влиять на оптические свойства образца метаматериала в зависимости от его формы и окружения.

3. Для метаматериала «двойная рыболовная сеть» показано существование области длин волн с отрицательным показателем преломления, что согласуется с результатами предыдущих исследований, несмотря на возникновение бианизотропии. Хотя бианизотропия и не привнесла существенного вклада в величину показателя преломления, для получения точных результатов необходимо учитывать и этот малый вклад. Возможно, изменяя конструкцию метаматериала, удастся получать большие значения бианизотропии, и появятся возможности использования нелокальности отклика для эффективного управления светом.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения выпускной квалификационной работы бакалавра были получены следующие основные результаты:

1. Разработан метод восстановления локальных восприимчивостей эффективного электромагнитного отклика.

2. С помощью метода мод Фурье рассчитаны матрицы рассеяния в диапазоне энергий падающей волны $[300,700]$ мЭВ и $[400,850]$ мЭВ для двух плоско-параллельных пластин метаматериалов: «двойная рыболовная сеть» и композитная структура с двумя повернутыми щелевыми резонаторами в элементарной ячейке соответственно.

3. Используя разработанный метод восстановления, вычислены частотные зависимости параметров электромагнитного отклика.

4. Выведены аналитические выражения зависимости параметров рассеяния от локальных восприимчивостей метаматериалов, обладающих осью симметрии 4 порядка.

Было показано, что выбранный метод обладает высокой точностью описания и успешно отражает резонансное поведение отклика. Также с его помощью возможно вычислить поляризационно-зависимый эффективный показатель преломления анизотропного метаматериала.

На ряду с этим, метод имеет ряд серьезных ограничений. Было показано, что материал описывается различным способом в зависимости от диэлектрического окружения, и поэтому отклик является существенно нелокальным. Нелокальность данного вида не сводится к наличию пространственной дисперсии отклика, т.е. зависимости восприимчивостей от волнового вектора.

Подводя итоги, отметим, что правильное описание электромагнитного отклика метаматериалов должно обязательно учитывать его существенную нелокальность.

Студент 421 группы
Громыко Дмитрий Алексеевич

подпись студента

Научный руководитель:
доктор ф.-м. наук, профессор
Тиходеев Сергей Григорьевич

подпись научного руководителя

Допущена к защите 27.05.2019

Зав.кафедрой _____
подпись зав.кафедрой

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Simovski C.R., Tretyakov S.A., Local constitutive parameters of metamaterials from an effective-medium perspective // *Physical Review B*, 75, 195111 (2007)
2. Smith D.R. et al., Determination of effective permittivity and permeability of metamaterials from reflection and transmission coefficients // *Physical Review B*, 65, 195104 (2002)
3. Тиходеев С.Г., Гиппиус Н.А., Плазмон-поляритонные эффекты в наноструктурированных металл-диэлектрических фотонных кристаллах и метаматриалах // *УФН*, 179, 1003 (2009)
4. Tikhodeev S.G. et al., Quasiguidded modes and optical properties of photonic crystal slabs // *Physical Review B*, 66, 045102 (2002)
5. Lindell I.V., Sihvola A.H., Tretyakov S.A., Viitanen A.J., *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-Isotropic Media* // Artech House (1994)
6. Julian Schwinger, Lester L. Deraad Jr., Kimball A. Milton, Wu-yang Tsai, Joyce Norton, *Classical electrodynamics* // Perseus Books (1998)
7. D. R. Smith and J. B. Pendry, Homogenization of metamaterials by field averaging // *Journal of the Optical Society of America B*, 23, 391 (2006)
8. M. G. Silveirinha, Metamaterial homogenization approach with application to the characterization of microstructured composites with negative parameters // *Physical Review B*, 75, 115104 (2007)
9. A. Alù , First-principles homogenization theory for periodic metamaterials // *Physical Review B*, 84, 075153 (2011)
10. C. R. Simovski, On electromagnetic characterization and homogenization of nanostructured metamaterials // *Journal of Optics*, 13, 013001 (2010)
11. A. Chipouline , C. Simovski, S. Tretyakov, Basics of averaging of the Maxwell equations for bulk materials // *Metamaterials*, 6, 77-120 (2012)

12. Агранович В.М., Гартштейн Ю.Н., 2006. Пространственная дисперсия и отрицательное преломление света // УФН, 176, 1051 (2006)
13. K. Mnasri, A. Khrabustovskyi, M. Plum, and C. Rockstuhl, Retrieving effective material parameters of metamaterials characterized by nonlocal constitutive relations// Physical Review B, 99, 035442 (2019)
14. M. G, Silveirinha, Boundary conditions for quadrupolar metamaterial // New Journal of Physics, 16, 083042 (2014)
15. U. Fano, The theory of anomalous diffraction gratings and of quasi-stationary waves on metallic surfaces // Journal of the Optical Society of America, 31, 213-222 (1941)
16. R. W. Wood, On a remarkable case of uneven distribution of light in a diffraction grating spectrum // Proceedings of the Physical Society of London, 18, 396 (1902)
17. William L. Barnes, Alain Dereux, Thomas W. Ebbesen, Surface plasmon subwavelength optics // Nature 424, 6950, 824-830 (2003)
18. G. Mie, Beiträge zur optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen // Annalen der physik, 330, 377-445 (1908)
19. A. Christ, S. G. Tikhodeev, N. A. Gippius, J. Kuhl, H. Giessen, Waveguide-Plasmon Polaritons: Strong Coupling of Photonic and Electronic Resonances in a Metallic Photonic Crystal Slab // Physical Review Letters, 91, 183901 (2003)
20. В.В. Климов, Плазмоника // УФН 178, 8 (2008)
21. Y. Sun, Y. Xia, Shape-controlled synthesis of gold and silver nanoparticles // Science, 298, 2176 (2002)
22. Веселаго В.Г., Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ϵ и μ // УФН, 92, 517 (1967)
23. Веселаго В.Г., Электродинамика материалов с отрицательным коэффициентом преломления // УФН, 173, 790 (2003)
24. Л. И. Мандельштам // ЖЭТФ, 15, 475 (1945)

25. R. A. Shelby, D. R. Smith, S. Schultz, Experimental verification of a negative index of refraction // *Science*, 292(5514):77-9 (2001)
26. D. Schurig et al., Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies // *Science*, 314, 5801, 977-80 (2006)
27. V. Kisel, A. Lagarkov, Near-perfect absorption by a flat metamaterial plate // *Physical Review E*, 76, 065601 (2007)
28. Litchinitser, N. M. et al., Effect of negative-index thin film on optical bistability // *Optical Letters*, 32, 151 (2007)
29. J. Pendry, A. Holden, D. Robbins, and W. Stewart, Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena// *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 47, 2075 (1999)
30. Smith D R et al., Composite Medium with Simultaneously Negative Permeability and Permittivity // *Physical Review Letters*, 84, 4184 (2000)
31. R. Marque's, F. Medina, and R. Rafii-El-Idrissi, Role of bianisotropy in negative permeability and left-handed metamaterials // *Physical Review B*, 65, 144440 (2002)
32. X. Chen, B. Wu, J. A. Kong, and T. M. Grzegorzczuk, Retrieval of the effective constitutive parameters of bianisotropic metamaterials // *Physical Review E*, 71, 046610 (2005)
33. L. Li, New formulation of the Fourier modal method for crossed surface-relief gratings // *J. Opt. Soc. Am. A* 14, 2758–2767 (1997).
34. L. Li, Use of Fourier series in the analysis of discontinuous periodic structures // *J. Opt. Soc. Am. A* 13, 1870–1876 (1996).
35. L. Li, Fourier modal method for crossed anisotropic gratings with arbitrary permittivity and permeability tensors // *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* 5, 345–355 (2003).

36. T. M. Grzegorzcyk, X. Chen, J. Pacheco, Reflection coefficients and Goos-Hancen shifts in anisotropic and bianisotropic left-handed metamaterials // PIER, 51, 83–113 (2005)
37. P. B. Johnson, R. W. Christy, Optical Constants of the Noble Metals // Physical Review B, 6, 4370 (1972)
38. Демидович Б.П., Марон И.А., Основы вычислительной математики, 3-е изд. // Наука (1966)